

MASA CENTRALNA A KRZYWA ROTACJI DYSKÓW
AKRECYJNYCH W UKŁADACH SAMOGRAWITUJĄCYCH

Masa centralna a krzywa rotacji dysków akrecyjnych w
układach samograwitujących

Michał Piróg

Instytut Fizyki im. Mariana Smoluchowskiego
Uniwersytet Jagielloński

ROZPRAWA DOKTORSKA

Kraków, 2015

Spis treści

Podziękowania	5
Wstęp	7
Zadania rozprawy	7
Streszczenie	8
Objaśnienia	9
Rozdział 1. Układy newtonowskie	11
1.1. Konstrukcja modeli dysków newtonowskich	11
1.1.1. Prawo rotacji	11
1.1.2. Opis układu	12
1.2. Wyniki analityczne	13
1.2.1. Ogólne rozważania	13
1.2.2. Krzywa rotacji, a masa układu – wyniki analityczne dla serii szczególnych przypadków	14
1.3. Konstrukcja newtonowskich modeli numerycznych, skalowanie	16
1.4. Opis procedury numerycznej	17
1.5. Wyniki	18
1.6. Wirialne testy poprawności rachunków numerycznych w modelu 0PN	20
1.7. Szacowanie mas obiektów astronomicznych na przykładzie NGC4258	23
1.8. Newtonowskie układy dyskowe – wnioski	25
Rozdział 2. Układy post-newtonowskie	27
2.1. Konstrukcja modeli dysków post-newtonowskich	27
2.1.1. Opis w układzie kartezjańskim	27
2.1.2. Opis w układzie cylindrycznym – warunki osiowej symetrii	29
2.2. Wyniki analityczne – warunek całkowalności	32
2.3. Konstrukcja post-newtonowskich modeli numerycznych, skalowanie	34
2.4. Opis procedury numerycznej	35
2.5. Wyniki	36
2.6. Wirialne testy poprawności rachunków numerycznych w modelu 1PN	38
2.7. Post-newtonowskie układy dyskowe – wnioski	42
Rozdział 3. Przybliżenie słabego pola - rozważania ogólne	45
3.1. Poprawki do prędkości wynikające z OTW	45
3.2. Poprawki 1PN dla podstawowych parametrów	47
3.2.1. Przypadek pierwszy	47
3.2.2. Przypadek drugi	53
3.2.3. Przypadek trzeci	58
3.3. Wnioski	63
Zakończenie	65
Dodatek A	67
Dodatek B	69

Bibliografia	71
-------------------------------	-----------

Podziękowania

Pragnę serdecznie podziękować mojemu naukowemu opiekunowi i promotorowi pracy doktorskiej profesorowi Edwardowi Malcowi za poświęcony czas i pomoc otrzymaną w czasie pisania rozprawy oraz w czasie trwania moich studiów doktoranckich.

Jednocześnie dziękuję promotorowi pomocniczemu mojej pracy doktorskiej doktorowi Patrykowi Machowi za jego zaangażowanie, poświęcony czas oraz cenne uwagi dotyczące ostatecznego kształtu tekstu.

Dziękuję członkom i współpracownikom Zakładu Teorii Względności i Astrofizyki oraz społeczności skupionej wokół Zespołu Zakładów Fizyki Teoretycznej Instytutu Fizyki Uniwersytetu Jagiellońskiego za wszelką pomoc oraz wspianą atmosferę towarzyszącą codziennej pracy badawczej.

Na koniec chciałbym podziękować moim najbliższym – narzeczonej Aleksandrze, Rodzicom oraz Bratu za ich wsparcie, bez którego nie znalazłbym się dzisiaj w miejscu w którym się znajduję.

Wstęp

Zadania rozprawy

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie wyników badań dotyczących rotacji newtonowskich i post-newtonowskich (w sensie Ogólnej Teorii Względności) układów dyskowych. Zwraca się uwagę na interpretację pojęcia *keplerowskiej rotacji* w teorii newtonowskiej, post-newtonowskiej oraz ogólnorelatywistycznej. W pierwszej, newtonowskiej i w drugiej, post-newtonowskiej części pracy wyniki prezentowane są według jednego schematu. Na początku znajdują się analityczne rachunki prowadzące do równań determinujących układ, następnie zamieszczony jest opis metody numerycznej, po którym prezentowane i dyskutowane są wyniki przeprowadzonych symulacji oraz zakres ich stosowalności.

Do przedstawienia znacznej części zagadnień klasycznej astronomii i mechaniki niebieskiej w zupełności wystarcza model centralnej masy i ciał rotujących wokół niej pod wpływem newtonowskiej grawitacji. Za motywację niniejszej pracy można uznać chęć usystematyzowania wiedzy na temat stosowalności różnych podejść do badań keplerowskich dysków, tj. takich, których prędkość kątowna Ω jest funkcją odległości od osi obrotu r postaci $\Omega = \text{const}/r^{3/2}$. Zależność ta została wybrana ze względu na jej częstość występowania w obserwowanych układach astronomicznych.

W literaturze znajdują się zarówno prace uwzględniające jedynie centralną masę i analizujące rotację dysku będącego wyłącznie pod jej wpływem [2] jak i takie, w których charakter rotacji zdeterminowany jest przez centralną masę oraz ciężki dysk [3]. Istnieją również prace, w których rozdziela się oba składniki, np. [4], gdzie prędkość rotacji materii pyłowej w danej odległości od centrum zawiera jedynie informację na temat materii znajdującej się wewnątrz. W pracy [5], powstałej z moim udziałem, przedstawione jest rozumowanie pokazujące, jak należy podchodzić do keplerowskiej rotacji płynów politropowych i co można powiedzieć na temat rozkładu mas w układzie charakteryzującym się takim ruchem.

Istnieją również ogólnorelatywistyczne modele dysków. W przypadku płynów testowych rozważane były zagadnienia ruchu w ustalonej geometrii czasoprzestrzeni, np. [6], [7], [8], [9]. Praca [10] traktowała o tym samym zagadnieniu uwzględniając rotację czasoprzestrzeni poprzez osadzenie modelu w metryce Kerra. Pierwszy ogólnorelatywistyczny opis zawierający samograwitację przedstawiony został w [11], [12]. Pokazano tam efekt wleczenia układu współrzędnych, wynikającego z obecności rotującego toroidalnego rozkładu materii. Przeanalizowano również przypadki sztywnej rotacji oraz rotacji ze stałym momentem pędu na jednostkę masy. W pracy [13], napisanej przy moim udziale, skonstruowany został model post-newtonowski według schematu pochodzącego z [14]. Praca [13] prezentuje odkrycie nowego efektu słabego pola grawitacyjnego – antywleczenia dynamicznego. Praca [15] zawiera przeanalizowane przeze mnie testy poprawności numerycznej wykonanych obliczeń.

Streszczenie

Praca traktuje o samograwitujących, osiowo symetrycznych, rotujących wokół punktowej masy centralnej, politropowych dyskach, dla których narzucone zostało keplerowskie prawo rotacji $\Omega = \omega_0/r^{3/2}$, gdzie $\omega_0 = \text{const}$. Ten typ rotacji jest istotny ze względu na powszechność jego występowania w obserwowanych układach astronomicznych. Z matematycznego punktu widzenia jest to tzw. układ równań Poissona-Eulera, czyli sprzężony układ równań pola grawitacyjnego i i równań hydrodynamiki. Rozprawa składa się z dwóch części, analiza zagadnienia przeprowadzona jest w teorii newtonowskiej (ozn. 0PN) oraz w ogólnorelatywistycznej poprzez post-newtonowskie (ozn. 1PN) rozwinięcie równań Einsteina.

Na pierwszą część rozdziału 1 składa się analiza klasycznych równań hydrodynamiki. Pojawiające się wielkości termodynamiczne mają tu jasną i intuicyjną interpretację fizyczną. Choć keplerowska rotacja jest charakterystyczna dla cząstki próbnej w sferycznie symetrycznym potencjale grawitacyjnym, a uwzględnienie samograwitacji dysku wpływa na wypadkowy potencjał, nie zmienia to jednak faktu, że układ taki może rotować na sposób keplerowski. Przedstawione są analityczne rachunki poparte numerycznymi symulacjami udzielające odpowiedzi na pytanie o wpływ ciężkiego dysku na potencjał grawitacyjny i tym samym na dynamikę. Praca systematyzuje tego typu układy, wyróżniając w szczególności klasy, dla których obecność dysku nie wnosi żadnych istotnych zmian i ruch odbywa się praktycznie w potencjale masy punktowej M . W takim wypadku $\omega_0 = \sqrt{GM}$ i $\Omega = \sqrt{GM}/r^{3/2}$, gdzie G to stała grawitacji. Z drugiej strony okazuje się, że w pozostałych przypadkach stała w prawie rotacji będzie inna i szacowanie masy układu wprost z tego prawa prowadzi do błędnych wyników.

Druga część pracy – rozdziały 2 i 3 to analiza problemu w teorii relatywistycznej, gdzie opis przeprowadzony został poprzez rozwinięcie równań pola oraz równań hydrodynamiki do pierwszego rzędu post-newtonowskiego. W takim sformułowaniu dana wielkość fizyczna ξ jest sumą części newtonowskiej ξ_0 oraz jej rozszerzenia post-newtonowskiego ξ_1 (o ile istnieje), co zapisuje się następująco: $\xi = \xi_0 + \xi_1/c^2$, gdzie c jest prędkością światła w próżni. W szczególności prędkość rotacji płynu w tym modelu jest sumą części newtonowskiej oraz post-newtonowskiej. Ta ostatnia wnosi istotne zmiany do pełnego profilu prędkości sprawiając, że prędkość nie jest już dłużej funkcją jedynie odległości od osi obrotu, ale w ogólności zależy od geometrii samego dysku oraz geometrii czasoprzestrzeni. Obok intuicyjnie rozumianych i oczekiwanych efektów związanych z uwzględnieniem relatywistycznych poprawek, pojawił się jakościowo różny, zupełnie nowy efekt zmniejszający prędkość kątową, będący funkcją newtonowskiego profilu prędkości oraz gęstości. Dla takiego modelu istnieje granica $c \rightarrow \infty$, przy przejściu do której odzyskuje się klasyczne, znane równania newtonowskiej hydrodynamiki.

Dodatki A i B zamieszczone na końcu pracy traktują o technicznej stronie numerycznego rozwiązywania skalarnych i wektorowych równań typu Poissona w sferycznej i osiowej symetrii.

Praca prezentuje nie tylko analityczne podejście do zagadnienia rotacji diskutowanych układów. Numerycznie przeanalizowane zostało szerokie spektrum różnych (w sensie jakościowym) modeli. Rozważane są przypadki dysków o różnej masie w stosunku do punktowej masy centralnej. W każdym z tych przypadków brane są pod uwagę różne rozmiary liniowe dysków począwszy od rozciągających się niemalże od centralnej masy na bardzo duże odległości, skończywszy na znacznie oddalonych od niej toroidalnych rozkładach materii. Symulacje zostały przeprowadzone dla różnych wykładników politropy γ , a poprawność obliczeń numerycznych sprawdzona poprzez odpowiednio dobrane relacje wirialne.

Otrzymane wyniki dla modelu newtonowskiego pokazują, że ciężkie dyski, których masa jest porównywalna, bądź większa od masy centralnej mogą rotować zgodnie z keplerowskim prawem rotacji. Na ich podstawie wnioskuje się, że częstość rotacji takich układów związana jest z rozkładem materii dyskowej, a zakres jej wartości określony jest przez funkcję dwóch

parametrów, jakimi są masa centralna oraz masa dysku. Wyniki analizy post-newtonowskiej ujawniają kompletnie inny profil prędkości kątowej przy uwzględnieniu poprawek 1PN. Przedstawiony w pracy warunek całkowalności post-newtonowskiego równania Eulera pozwala wyliczyć wspomnianą poprawkę. Okazuje się, że nie jest już ona jedynie funkcją odległości od osi obrotu, ale zależy również od odległości od płaszczyzny symetrii. Składa się ona z trzech grup wyrażeń posiadających konkretne interpretacje fizyczne i jest konsekwencją uwzględnienia innego relatywistycznego efektu. Dalsza analiza pokazuje, że wspomniane składniki mają różne znaki i w pewnym stopniu znoszą się nawzajem osłabiając sumaryczny efekt. W szczególności, koncepcyjnie nowy, nierozpoznany w żadnym dotychczasowym opisie tego typu problemów efekt hamowania (tzw. dynamiczne antywłeczenie) przeciwdziała przyspieszającemu efektowi interpretowanemu jako przejaw relatywistycznego wleczenia układu współrzędnych. Praca zawiera dyskusję wszystkich efektów oraz prezentuje ich wzajemne relacje w zależności od parametrów układu.

Objaśnienia

Używane układy współrzędnych:

1. Układ kartezjański (x, y, z) .
2. Układ cylindryczny (r, ϕ, z) .
3. Układ sferyczny (R, θ, ϕ) .

Uwagi:

1. Indeksy greckie μ, ν itd. przebiegają wartości 0, 1, 2, 3.
2. Indeksy łacińskie i, j , itd. przebiegają wartości 1, 2, 3.
3. Sygnatura tensora metrycznego to $(-, +, +, +)$.
4. Wielkości które tego wymagały zostały rozdzielone na część newtonowską i post-newtonowską poprawkę według schematu $\xi = \xi_0 + c^{-2}\xi_1$.

Wykaz oznaczeń pojawiających się w pracy:

1. G = stała grawitacji
2. ∇ = operator gradientu
3. $\nabla \cdot$ = operator dywergencji
4. $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ = operator Laplace'a
5. ∇_μ = operator pochodnej kowariantnej
6. Ω = prędkość kątowa
7. ω_0 = stała proporcjonalności w prawie rotacji
8. p = ciśnienie
9. ρ = rozkład gęstości materii w układzie
10. ϱ = gęstość barionowa materii dyskowej
11. $\varrho_{\max}$ = maksymalna gęstość barionowa w profilu dysku
12. ϱ_{tol} = parametr tolerancji kontrolujący zbieżność metody numerycznej
13. K = stała proporcjonalności w równaniu stanu
14. γ = wykładnik adiabatyczny w równaniu stanu
15. c = prędkość światła w próżni
16. $\mathbf{x}$ = trójwymiarowy wektor wodzący
17. $\mathbf{v}$ = wektor prędkości liniowej
18. U = potencjał grawitacyjny
19. U_d = potencjał grawitacyjny generowany przez dysk

20. M_c = punktowa masa centralna
21. M_d = newtonowska masa dysku
22. M_{IPN} = post-newtonowska masa dysku
23. δ = dystrybucja delta Diraca
24. h = entalpia właściwa
25. r_{in} = promień wewnętrzny dysku
26. r_{out} = promień zewnętrzny dysku
27. L = liczba użytych wielomianów Legendre'a w rozwinięciu kątowym funkcji Greena
28. H = względna grubość dysku
29. $M_{\odot}$ = masa Słońca
30. R = skalar Ricciego
31. $R_{\mu\nu}$ = tensor Ricciego
32. $T_{\mu\nu}$ = tensor energii-pędu-napięć
33. $\mathbf{A}$ = wektorowy potencjał rotacyjny
34. u^μ = czteroprędkość
35. g = wyznacznik z tensora metrycznego
36. e = gęstość energii właściwej
37. j = relatywistyczny moment pędu

Podstawowe pojęcia:

1. Krzywa rotacji – zależność prędkości kątowej Ω elementu materii od odległości od osi obrotu r .
2. Rotacja keplerowska – zależność prędkości kątowej Ω elementu materii od odległości od osi obrotu r , postaci $\Omega = \omega_0/r^{3/2}$.
3. Rotacja ściśle keplerowska – charakterystyczna dla cząstki próbnej, orbitującej po kołowej orbicie w sferycznie-symetrycznym potencjale ciała o masie M_c zależność prędkości kątowej Ω od odległości od osi obrotu r , postaci $\Omega = \sqrt{GM_c}/r^{3/2}$.
4. Układ politropowy – układ złożony z materii spełniającej równania stanu postaci $p = K\varrho^\gamma$.

Rozdział 1

Układy newtonowskie

1.1. Konstrukcja modeli dysków newtonowskich

1.1.1. Prawo rotacji

Każdy klasyczny układ astronomiczny dający się opisać stacjonarnym potencjałem grawitacyjnym $U(\mathbf{x})$ wraz z warunkami początkowymi $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$ definiuje wektorowe pole prędkości $\mathbf{v}(U(\mathbf{x}))$ z jaką poruszać się będzie umieszczona w nim cząstka próbna. Po narzuceniu warunku osiowej symetrii w układzie cylindrycznym (r, ϕ, z) pole prędkości nie zależy od zmiennej kątowej $\mathbf{v}: \mathbf{v}(r, z)$. Pojęcie *krzywej rotacji* definiuje się jako funkcję prędkości kątowej od odległości elementu materii od osi obrotu, $\Omega: \Omega(r)$.

Spośród wszystkich możliwych krzywych rotacji, w pracy tej podjęte zostały badania układów charakteryzujących się szczególnym przypadkiem postaci

$$\Omega = \omega_0 r^{-3/2}, \quad (1.1)$$

gdzie $\omega_0 = \text{const}$. Sama zależność jest określana jako *rotacja keplerowska* i swoją nazwę zawdzięcza analogii do praw ruchu planet Keplera. Istotnie, prawa mechaniki nieba sformułowane w układzie współrzędnych sferycznych (R, θ, ϕ) mówią, że w sferycznie symetrycznym potencjale ciała o masie M ruch po okręgu o promieniu R odbywa się w ustalonej płaszczyźnie ze stałą prędkością kątową

$$\Omega = \sqrt{GM} R^{-3/2}, \quad (1.2)$$

gdzie G to stała grawitacji. Ten szczególny przypadek w pracy nazywać się będzie *ściśle keplerowskim prawem rotacji*.

W astronomii obserwacyjnej zmierzona krzywa rotacji stanowi punkt wyjścia do poszukiwań rozkładu materii generującego potencjał, którego odzwierciedleniem jest obserwowana dynamika. Przewidywania płynące z tych poszukiwań budzą sporo emocji wśród badaczy krzywych rotacji galaktyk i wielkoskalowych struktur we Wszechświecie. Dzieje się tak dlatego, że istnieje wiele układów posiadających krzywe rotacji nie dające się wyjaśnić żadnym typowym rozkładem materii. Historycznie doprowadziło to do powstania nowych, kontrowersyjnych pomysłów na wytłumaczenie takiego stanu rzeczy. Tego typu trudności przekładają się również na niepowodzenia w próbach szacowania mas obiektów astronomicznych. Przedstawione w pracy rozumowanie ogranicza się jedynie do keplerowskich krzywych rotacji. Rozważa się mianowicie jedynie takie rozkłady materii, które mogą generować wypadkowy potencjał, precyzyjnie taki, że ruch będzie keplerowski. Należy zwrócić uwagę, że tego typu modele są nieodpowiednie do analizy obiektów takich jak galaktyki. Wśród zastosowań wymienić należy raczej dyski akrecyjne wokół zwartych obiektów. Wybór prawa rotacji został podyktowany kwestią praktyczną – bardzo wiele obiektów astronomicznych rotuje zgodnie z przyjętą tu relacją (1.1).

1.1.2. Opis układu

Newtonowski układ jest całkowicie opisany przez dwa pola skalarne: potencjał grawitacyjny $U(\mathbf{x})$ oraz rozkład gęstości materii $\rho(\mathbf{x})$. Równaniami, które je zadają są równanie pola grawitacyjnego oraz równanie Eulera [1]:

$$\Delta U = 4\pi G\rho, \quad (1.3a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\nabla p}{\rho} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \nabla U = 0. \quad (1.3b)$$

Rozważa się przypadek stacjonarny, gdzie $\partial_t \mathbf{v} = 0$. Rozkład materii $\rho(\mathbf{x})$ można zadać w postaci sumy $\rho(\mathbf{x}) = M_c \delta^{(3)}(\mathbf{x}) + \varrho(\mathbf{x})$, gdzie pierwszy składnik opisuje centralną masę punktową, drugi rozkład materii dyskowej. Równania powyższe przyjmują postać

$$\Delta U = 4\pi G \left(M_c \delta^{(3)}(\mathbf{x}) + \varrho \right), \quad (1.4a)$$

$$\frac{\nabla p}{\varrho} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \nabla U = 0. \quad (1.4b)$$

Pierwsze z nich, jako równanie liniowe, można podzielić na dwie części i zapisać rozwiązanie

$$U = -\frac{GM_c}{|\mathbf{x}|} + U_d, \quad (1.5)$$

gdzie potencjał U_d związany z materią dyskową jest rozwiązaniem równania Poissona:

$$\Delta U_d = 4\pi G\varrho. \quad (1.6)$$

Do rozwiązania drugiego z równań potrzebny jest szereg założeń modelowych. Zakłada się zatem izoentropowość oraz wybiera równanie stanu. Spośród relacji barotropowych postaci $p = p(\varrho)$ pod uwagę zostały wzięte jedynie równania politropowe

$$p = K\varrho^\gamma. \quad (1.7)$$

Dla każdej zmiennej ξ opisującej model, zakłada się symetrię osiową $\xi: \xi(r, z)$ oraz symetrię równikową $\xi(r, -z) = \xi(r, z)$. Z założeń tych wnioskuje się, że $\mathbf{v} = (0, \Omega(r, z)r, 0)$, co pozwala zapisać równanie (1.3b) jak następuje

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{\partial U}{\partial r} + \Omega(r, z)^2 r, \quad (1.8a)$$

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\partial U}{\partial z}. \quad (1.8b)$$

Różniczkując teraz pierwsze z równań po zmiennej wertykalnej, drugie po zmiennej radialnej oraz dodając stronami dostaje się warunek $\partial_z \Omega(r, z) = 0 \Rightarrow \Omega = \Omega(r)$, co oznacza, że prędkość kątowna jest funkcją jedynie odległości od osi obrotu, nie zależy natomiast od odległości od płaszczyzny równikowej. Jest to treścią twierdzenia Poincaré-Wavre'a [16]. Wreszcie założenie prawa rotacji

$$\Omega = \frac{\omega_0}{r^{3/2}}, \quad (1.9)$$

gdzie ω_0 to stała, pozwala na scałkowanie równania Eulera i zapisanie go w formie

$$h + U + U_c = C. \quad (1.10)$$

Powyżej h oznacza entalpię właściwą, $dh := \frac{dp}{\varrho}$, U_c jest potencjałem odśrodkowym

$$U_c = - \int^r dr' r' \Omega^2 = \frac{\omega_0^2}{r}. \quad (1.11)$$

Po uwzględnieniu założeń modelowych, czyli stacjonarności, osiowej i równikowej symetrii, równania stanu i prawa rotacji, newtonowski układ jest całkowicie zdeterminowany przez dwa pola skalarne: potencjał grawitacyjny $U(\mathbf{x})$ oraz gęstość $\varrho(\mathbf{x})$, a równaniami które je zadają są równanie pola grawitacyjnego oraz równanie Bernoulliego (1.10). Jest to następujący układ równań algebraicznych

$$U = - \frac{GM_c}{|\mathbf{x}|} + U_d, \quad (1.12a)$$

$$h + U + U_c = C. \quad (1.12b)$$

Należy zwrócić uwagę, że w problemie tym nie ma określonych warunków brzegowych. Rozkład gęstości będący rozwiązaniem powyższego układu jest jednoznacznie określony i jednoznacznie określona jest również powierzchnia S spełniająca warunek $\varrho(r, z) = 0$. Powierzchnia taka, na zewnątrz której $\varrho(r, z) \leq 0$ interpretowana jest jako brzeg dysku. W rozdziale 1.4 opisana jest procedura, która prowadzi do otrzymania profilu gęstości spełniającego powyższy układ równań, gdzie nie zadaje się warunków brzegowych przy czym są one jednoznacznie zadane w rozwiązaniu. Tego typu podejście nosi nazwę *zagadnienia ze swobodnym brzegiem*.

Opis prowadzony jest w cylindrycznym układzie współrzędnych. W środku zadaje się punktową masę M_c , wokół której rozważany jest osiowo symetryczny rozkład politropowego płynu o symetrii odbicia względem płaszczyzny $z = 0$. Prędkość kątowna płynu jest zadana wzorem (1.1) i w cylindrycznym układzie współrzędnych jest co do wartości równa azymutalnej składowej wektora prędkości liniowej $\mathbf{v} = (0, 0, \Omega \partial_\phi)$ lub równoważnie $\mathbf{v} = r\Omega \hat{e}_\phi$, gdzie $\hat{e}_\phi$ to jednostkowy wektor o kierunku azymutalnym. Profil taki scharakteryzowany jest arbitralnie wybranymi parametrami $\rho_{\max}$, r_{in} i r_{out} oznaczającym odpowiednio maksymalną wartość gęstości oraz wewnętrzny i zewnętrzny promień dysku w jego płaszczyźnie równikowej. Ostatnim swobodnym parametrem jest wykładnik γ w równaniu stanu. Taki dobór parametrów w połączeniu z założeniami modelowymi, w szczególności z keplerowskim prawem rotacji determinuje wszystkie pozostałe, czyli stałą K w równaniu stanu oraz stałą całkowania C w równaniu Bernoulliego.

Z punktu widzenia prostoty dalszego opisu, jako przestrzeń parametrów jednoznacznie zadających dany układ wygodnie jest wybrać: stosunek masy centralnej do masy dysku M_c/M_d , stosunek promienia wewnętrznego do promienia zewnętrznego $r_{\text{in}}/r_{\text{out}}$ oraz wykładnik politropy γ . Dla modelu post-newtonowskiego dodatkowym parametrem jest prędkość światła c .

1.2. Wyniki analityczne

1.2.1. Ogólne rozważania

Niniejszy rozdział wykorzystuje wynik opublikowany wcześniej w [5]. Wyliczenie współczynnika ω_0 w krzywej rotacji (1.9) umożliwia następująca procedura. Do równania (1.10) należy wstawić wyrażenie na potencjał odśrodkowy (1.11). Wykorzystanie warunku zerowania się entalpii właściwej na brzegach dysku, a dokładnie w punktach położonych najbliżej i najdalej od masy centralnej $h(r_{\text{in}}) = h(r_{\text{out}}) = 0$ pozwala na wyliczenie współczynnika w prawie rotacji:

$$\omega_0^2 = GM_c - r_{\text{in}} U_d(r_{\text{in}}, z = 0) + r_{\text{in}} C = GM_c - r_{\text{out}} U_d(r_{\text{out}}, z = 0) + r_{\text{out}} C \quad (1.13)$$

lub też:

$$\omega_0^2 = GM_c + \frac{r_{\text{in}} r_{\text{out}} (U_d(r_{\text{out}}, z=0) - U_d(r_{\text{in}}, z=0))}{r_{\text{out}} - r_{\text{in}}}. \quad (1.14)$$

Należy zwrócić uwagę, że drugi składnik powyższej sumy jest funkcją nie tylko promienia wewnętrznego dysku i rozkładu gęstości, ale również całego rozkładu materii, a więc i M_c . Stanie się to jasne po lekturze dalszych rozdziałów pracy.

Rozkłady gęstości i potencjału, przy przyjętych założeniach modelowych kompletnie opisują dany układ. Składa się on z masy centralnej M_c oraz materii dyskowej o masie $M_d = \int d^3x \varrho$. Rotacja opisana jest wzorem (1.1), gdzie stała ω_0 dana jest na podstawie (1.13), (1.14). W ogólnym przypadku samograwitacja dysku powoduje zmianę krzywej rotacji względem przypadku ściśle keplerowskiego. Bardziej precyzyjnie: powoduje zmianę częstości kołowej. Ze wzoru (1.13) widać, że znormalizowana różnica pomiędzy obiema wartościami jest równa

$$\delta^2(r_{\text{in}}, \varrho, M_c) = \frac{|\omega_0^2 - GM_c|}{GM_c}. \quad (1.15)$$

Z analizy powyższego wzoru wynika, że błędem jest szacowanie masy centralnej na podstawie ściśle keplerowskiego prawa rotacji bez znajomości rozkładu materii oraz geometrii, jedynie na podstawie profilu prędkości. Należy podkreślić, że poza masą centralną na dynamikę układu wpływ ma również obecność dysku. Wielkość δ jest tutaj pewnego rodzaju miarą informującą jak duży jest ten wpływ. Łączenie keplerowskiej rotacji ze wzorem (1.2) w ogólności jest niepoprawne i daje błędne wyobrażenie o stanie układu. Z drugiej strony istnieją szczególne przypadki, kiedy to wpływ dysku jest zaniedbywalny, a różnica δ jest bliska zero.

W dalszej części pracy przedstawione zostaną wyniki numeryczne świadczące o tym, że różnica ta jest ściśle dodatnia oraz rośnie wraz ze wzrostem masy dysku w stosunku do masy centralnej. Badania pokazują, że dla politropowych płynów związek pomiędzy δ a stosunkiem M_d/M_c nie jest liniowy i ogólnie wyraża się pewną skomplikowaną funkcją, której wartości wyliczane są numerycznie dla zadanego przypadku.

W pewnych szczególnych konfiguracjach problem da się rozwiązać analitycznie, w pozostałych natomiast posługując się metodami numerycznymi można wyliczyć wspomnianą różnicę. Najbliższe podrozdziały zawierają argumenty oraz rachunki, które dadzą czytelnikowi wyobrażenie na temat skali zmian powodowanych przez uwzględnienie samograwitacji dysku.

W wyniku obliczeń otrzymuje się rozkład potencjału oraz rozkład gęstości płynu politropowego rotującego zgodnie z (1.1). Jak już zostało podkreślone, powyższy wybór ma uzasadnienie w obserwacjach astronomicznych. Bardzo wiele układów astronomicznych charakteryzuje się właśnie keplerowską krzywą rotacji, w szczególności prawie wszystkie pogwiazdowe czarne dziury posiadające gazowy dysk. W dalszej części pracy przedstawiony zostanie przypadek keplerowskiej rotacji dysku wokół aktywnego jądra galaktyki (AGN).

Stała ω_0^2 jest większa o δ^2 od tej w ściśle keplerowskim prawie rotacji. Rachunki pokazują, że $\delta^2 \in \langle 0, GM_d \rangle$. W keplerowskich układach samograwitujących politropowych dysków częstość rotacji spełnia nierówność $GM_c \leq \omega_0^2 \leq G(M_c + M_d)$. Na poparcie tej numerycznej tezy przedstawione są poniżej badania analityczne trzech jakościowo różnych układów dla ustalonego r_{out} .

1.2.2. Krzywa rotacji, a masa układu – wyniki analityczne dla serii szczególnych przypadków

Przybliżenie płynu testowego. W przypadku testowego dysku o masie zaniedbywalnej względem masy centralnej dysk będzie nieskończenie cienki, będzie rotował ściśle keplerowsko i

szacowania masy centralnej da się dokonać wprost ze wzoru $\omega_0^2 = GM_c$. Ustalenie promieni wewnętrzznego i zewnętrznego dysku, r_{in} i r_{out} odpowiednio, oraz przejście z maksymalną gęstością dysku ϱ_{max} do granicy $\lim_{\varrho_{\text{max}} \rightarrow 0} \varrho$ implikuje zerowanie się potencjału U_d danego równaniem (1.6). Z równania (1.14) otrzymuje się $\omega_0^2 \rightarrow GM_c$ i równanie (1.12b)

$$h + GM_c \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right) = 0. \quad (1.16)$$

Powyższe równanie może być spełnione jedynie gdy $z = 0$ i $h \rightarrow 0$. Oznacza to, że dla przyjętych przez nas założeń modelowych, w teorii newtonowskiej dysk testowy musi być nieskończenie cienki [5].

Przypadek $r_{\text{in}} \rightarrow 0$. Niech maksymalna wartość gęstości będzie różna od zera, $\varrho_{\text{max}} \neq 0$ oraz niech dysk ma skończone rozmiary. W takim przypadku potencjał grawitacyjny jest funkcją ograniczoną na $\mathbb{R}^3$. Innymi słowy $|U_d(r_{\text{out}}) - U_d(r_{\text{in}})|$ ma skończoną wartość, jeżeli ϱ_{max} ma skończoną wartość. Dla $r_{\text{in}} \rightarrow 0$ z równania (1.14) dąży do $\sqrt{GM_c}$ i rotacja jest ściśle keplerowska [5].

Przypadek $r_{\text{in}}/r_{\text{out}} \rightarrow 1$. Dla dysku o kształcie obręczy, gdy $r_{\text{in}} \rightarrow r_{\text{out}}$, wykorzystując twierdzenie o trzech funkcjach, można pokazać, że rotacja jest ściśle keplerowska. Punktem wyjścia jest tutaj pochodząca oryginalnie z [17] relacja wiralna

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \varrho U_d - \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \varrho \frac{GM_c}{|\mathbf{x}|} + \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \varrho |\mathbf{v}|^2 + 3 \int_{\mathbb{R}^3} d^3x p = 0. \quad (1.17)$$

Uwzględniając prawo rotacji otrzymuje się

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \varrho U_d + \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \varrho \left(\frac{\omega_0^2}{r} - \frac{GM_c}{|\mathbf{x}|} \right) + 3 \int_{\mathbb{R}^3} d^3x p = 0. \quad (1.18)$$

Zważywszy na dodatniość ciśnienia otrzymuje się

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3x \varrho \left(\frac{\omega_0^2}{r} - \frac{GM_c}{|\mathbf{x}|} \right) \leq -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \varrho U_d. \quad (1.19)$$

Uwzględnienie zależności $|\mathbf{x}| \geq r$ prowadzi do oszacowania

$$\left(\omega_0^2 - GM_c \right) \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \frac{\varrho}{r} \leq -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \varrho U_d. \quad (1.20)$$

Oznaczając teraz przez $U_{g,\text{min}}$ minimalną wartość potencjału pochodzącego od dysku i znajdującą się w jego obszarze, to znaczy tam gdzie $\varrho > 0$, można napisać:

$$\frac{\omega_0^2 - GM_c}{r_{\text{out}}} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \varrho \leq -\frac{1}{2} U_{g,\text{min}} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \varrho \quad (1.21)$$

i stąd

$$\omega_0^2 - GM_c \leq -\frac{1}{2} U_{g,\text{min}} r_{\text{out}}. \quad (1.22)$$

W granicy $r_{\text{in}} \rightarrow r_{\text{out}}$, przy ustalonej gęstości maksymalnej $\varrho_{\text{max}} \neq 0$ masa dysku dąży do zera. Ponadto objętość dysku oraz potencjał grawitacyjny generowany przez dysk dążą do zera i otrzymuje się

$$\omega_0^2 \leq GM_c. \quad (1.23)$$

Powołując się w dalszym ciągu na wyjściową relację wirialną (1.17) zapisuje się nierówność

$$-3 \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \, p \leq \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \, \varrho \left(\frac{\omega_0^2}{r} - \frac{GM_c}{|\mathbf{x}|} \right) \leq \left(\frac{\omega_0^2}{r_{\text{in}}} - \frac{GM_c}{r_{\text{out}}} \right) \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \, \varrho. \quad (1.24)$$

Uwzględniając równanie stanu otrzymać można

$$-3K\varrho_{\text{max}}^{\gamma-1} \leq \frac{\omega_0^2}{r_{\text{in}}} - \frac{GM_c}{r_{\text{out}}}. \quad (1.25)$$

Niech r_{max} oznacza punkt na równiku, gdzie gęstość osiąga maksimum. Spełnione jest wtedy równanie

$$\frac{K\gamma}{\gamma-1} \varrho_{\text{max}}^{\gamma-1} + U_d(r_{\text{max}}) + \frac{\omega_0^2}{r_{\text{max}}} - \frac{GM_c}{r_{\text{max}}} = C. \quad (1.26)$$

Dla zewnętrznego promienia dysku r_{out} zachodzi równość

$$U_d(r_{\text{out}}) + \frac{\omega_0^2}{r_{\text{out}}} - \frac{GM_c}{r_{\text{out}}} = C. \quad (1.27)$$

Dla $r_{\text{in}} \rightarrow r_{\text{out}}$ zachodzi $r_{\text{max}} \rightarrow r_{\text{out}}$. W takiej granicy $K = 0$, co prowadzi do wniosku

$$\omega_0 \geq GM_c. \quad (1.28)$$

Na podstawie nierówności (1.23) oraz (1.28) wnioskuje się, że w granicy $r_{\text{in}} \rightarrow r_{\text{out}}$ zachodzi

$$GM_c \leq \omega_0 \leq GM_c \quad (1.29)$$

czyli $\omega_0 = GM_c$ i rotacja jest ściśle keplerowska. Rozumowanie powyższe dla potrzeb niniejszej pracy zostało przeprowadzone przy założeniu równania stanu płynu politropowego. Pod dodatkowymi warunkami można je uogólnić dla szerszej klasy płynów barotropowych [5].

1.3. Konstrukcja newtonowskich modeli numerycznych, skalowanie

W obliczeniach numerycznych, wzorując się na pracach [18], [19], wprowadzone zostały bezwymiarowe zmienne. Wykorzystując maksymalną gęstość dysku ϱ_{max} oraz zewnętrzny promień dysku r_{out} wprowadza się wielkość $u := Gr_{\text{out}}^2 \varrho_{\text{max}}$. Posługując się powyższymi definicjami wprowadza się wyrażenia na bezwymiarowy potencjał grawitacyjny $\tilde{U} = U/u$, potencjał pochodzący od dysku $\tilde{U}_d = U_d/u$, entalpię właściwą $\tilde{h} = h/u$, gęstość barionową $\tilde{\varrho} = \varrho/\varrho_{\text{max}}$, wektor wodzący $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/r_{\text{out}}$ i punktową masę centralną $\tilde{M}_c = GM_c/(\varrho_{\text{max}} r_{\text{out}}^3)$. W tej notacji równanie na potencjał grawitacyjny można zapisać w formie

$$\tilde{U} = -\tilde{M}_c/|\tilde{\mathbf{x}}| + \tilde{U}_d, \quad (1.30)$$

gdzie potencjał pochodzący od dysku spełnia równanie

$$\tilde{\Delta} \tilde{U}_d = 4\pi \tilde{\varrho}. \quad (1.31)$$

Symbol $\tilde{\Delta}$ oznacza operator Laplace'a w bezwymiarowych zmiennych $\tilde{\mathbf{x}}$. Równanie Bernoulliego przyjmuje postać

$$\tilde{h} + \tilde{U}_c + \tilde{U} = C. \quad (1.32)$$

Dla politropowego równania stanu entalpia właściwa wyraża się wzorem $h = (K\gamma/(\gamma-1))\varrho^{\gamma-1}$, w nowych zmiennych natomiast $\tilde{h} = (\tilde{K}\gamma/(\gamma-1))\tilde{\varrho}^{\gamma-1}$. Stałe K i $\tilde{K}$ łączy zależność $\tilde{K} =$

$K\varrho_{\max}^{\gamma-1}/u$. Nowa postać wzoru na potencjał centryfugalny $\tilde{U}_c = \tilde{\omega}_0^2/\tilde{r}$ określa nową zależność dla ściśle keplerowskiej rotacji, mianowicie $\tilde{\omega}_0^2 = \tilde{M}_c$. W takim sformułowaniu otrzymuje się następującą przestrzeń parametrów całkowicie opisujących model: wykładnik politropy γ , masa centralna $\tilde{M}_c$ promień wewnętrzny dysku $\tilde{r}_{\text{in}} = r_{\text{in}}/r_{\text{out}}$. Na tym etapie należy zauważyć, że rozważany układ nie ma określonej skali odległości ani skali masy. Istotne są jedynie stosunki $r_{\text{in}}/r_{\text{out}}$ oraz M_c/M_d . Dopiero w podejściu post-newtonowskim, gdzie pojawia się potrzeba wprowadzenia prędkości światła, mamy sprecyzowaną skalę odległości poprzez *promień Schwarzschilda* odpowiadającą masie centralnej.

1.4. Opis procedury numerycznej

Struktura dysku otrzymywana jest na podstawie równania stanu i prawa rotacji oraz naprężonego rozwiązywania zapisanych w bezwymiarowych zmiennych równań (1.31), (1.32). Zastosowana metoda numeryczna nosi anglojęzyczną nazwę *Self-Consistent Field* (SCF) i pochodzi z prac [18, 20, 21].

We współrzędnych cylindrycznych na dwuwymiarowej siatce numerycznej proces rozwiązywania zagadnienia przebiega według następującego schematu [5]:

1. Ustala się parametry związane z precyzją numeryczną procedury:
 - a) rozdzielczość,
 - b) liczbę wielomianów Legendre’a, za pomocą których rozwijane są funkcje Greena (równanie Poissona (1.31) rozwiązywane jest w formie całkowej, według metody opisanej w [22])
 - c) parametr tolerancji $\tilde{\epsilon}_{\text{tol}}$ – patrz punkt szósty.
2. Ustala się parametry modelu:
 - a) równanie stanu (wykładnik politropy γ),
 - b) promień wewnętrzny dysku $\tilde{r}_{\text{in}} \in (0, 1)$ w płaszczyźnie równikowej (dla normalizacji w której promień zewnętrzny dysku znajduje się w odległości $\tilde{r}_{\text{out}} = 1$),
 - c) masę centralną $\tilde{M}_c$ i maksymalną gęstość $\tilde{\varrho}_{\text{max}}$ (pozwalającą kontrolować stosunek masy centralnej do masy dysku).
3. Proces zaczyna się od zapostulowania pewnego profilu gęstości. W tym przypadku zakłada się rozkład materii w torusie o promieniu koła tworzącego $(\tilde{r}_{\text{out}} - \tilde{r}_{\text{in}})/2$ oraz jego środka w $\tilde{r} = (\tilde{r}_{\text{out}} + \tilde{r}_{\text{in}})/2$ i $z = 0$ w którym gęstość spada liniowo od $\tilde{\varrho}_{\text{max}}$ w jego geometrycznym środku do zera na brzegu.
4. Z rozkładu gęstości wyliczane są kolejno potencjał grawitacyjny $\tilde{U}$ oraz stałe $\tilde{\omega}_c$ i C :
 - a) Potencjał grawitacyjny dany jest wzorem

$$\tilde{U} = -\frac{\tilde{M}_c}{|\tilde{\mathbf{x}}|} + \tilde{U}_d, \quad (1.33)$$

gdzie potencjał $\tilde{U}_d$ związany z materią dyskową jest rozwiązaniem równania Poissona

$$\tilde{\Delta}\tilde{U}_d = 4\pi\tilde{\varrho}. \quad (1.34)$$

Szczegóły numerycznego rozwiązywania równań tego typu omówione są w dodatku 3.3.

- b) Stała $\tilde{\omega}_c$ w prawie rotacji jest wyznaczona zgodnie z poniższym wzorem

$$\tilde{\omega}_c^2 = \tilde{M}_c + \frac{\tilde{r}_{\text{in}}\tilde{r}_{\text{out}}(\tilde{U}_d(\tilde{r}_{\text{out}}) - \tilde{U}_d(\tilde{r}_{\text{in}}))}{\tilde{r}_{\text{out}} - \tilde{r}_{\text{in}}}. \quad (1.35)$$

- c) Stała C w równaniu Bernoulliego jest wyznaczona z wykorzystaniem informacji o znikaniu entalpii właściwej na brzegu dysku, w $\tilde{r} = \tilde{r}_{\text{out}} = 1$, gdzie $\tilde{h}(\tilde{r}_{\text{out}}) = 0$. Z równania 1.32 mamy

$$C = \frac{\tilde{M}_c}{\tilde{r}_{\text{out}}} - \tilde{U}_d(\tilde{r}_{\text{out}}) - \frac{\tilde{\omega}_c^2}{\tilde{r}_{\text{out}}}. \quad (1.36)$$

5. Wykorzystując wielkości wyznaczone w poprzednim punkcie, z równania Bernoulliego

$$\tilde{h} = -\tilde{U} - \tilde{U}_c + C \quad (1.37)$$

wyznacza się nowy rozkład entalpii właściwej $\tilde{h}$. Następnie oblicza się rozkład gęstości według formuły

$$\tilde{\varrho} = \left(\frac{(\gamma - 1)\tilde{h}}{\tilde{K}_\gamma} \right)^{1/(\gamma-1)}. \quad (1.38)$$

Brzeg dysku zdeterminowany jest przez zadanie parametrów geometrycznych na równiku, natomiast w otrzymanym profilu stosuje się obcięcie $\tilde{h} \leq 0 \Rightarrow \tilde{\varrho} = 0$ w myśl którego za brzeg dysku uznaje się powierzchnię na której entalpia zmienia znak na ujemny. Oznacza to, że gęstość jest wyliczana na podstawie wzoru (1.38) wszędzie tam, gdzie entalpia jest dodatnia, natomiast w tych komórkach siatki numerycznej, w których wartość entalpii jest ujemna przyjmuje się gęstość równą zero. Na podstawie otrzymanego rozkładu gęstości oblicza się nowy potencjał z równań (1.33) i (1.34) oraz nowe stałe $\tilde{\omega}_c^2$ i C .

6. Procedura z dwóch poprzednich punktów powtarza się do momentu uzyskania zbieżności na arbitralnie wybranym poziomie. Innymi słowy, procedura kończy się i rozkłady $\tilde{\varrho}$ i $\tilde{U}$ uznawane są za rozwiązania wtedy, gdy maksymalna różnica pomiędzy n -tym, a $n-1$ -wszym rozkładem gęstości jest mniejsza niż żądana wartość $\tilde{\varrho}_{\text{tol}}$, co w praktyce oznacza zbieżność metody numerycznej.

W ten właśnie sposób praktycznie rozwiązuje się zagadnienia ze swobodnym brzegiem, który zmienia się wraz z kolejnymi iteracjami. Jak zostało opisane w punkcie 3, zaczyna się od jednorodnego torusa, efektem końcowym jest dysk, którego przykład zamieszczony jest w dalszej części pracy, w rozdziale 1.7 przy okazji rozważania własności układu AGN o nazwie NGC4258.

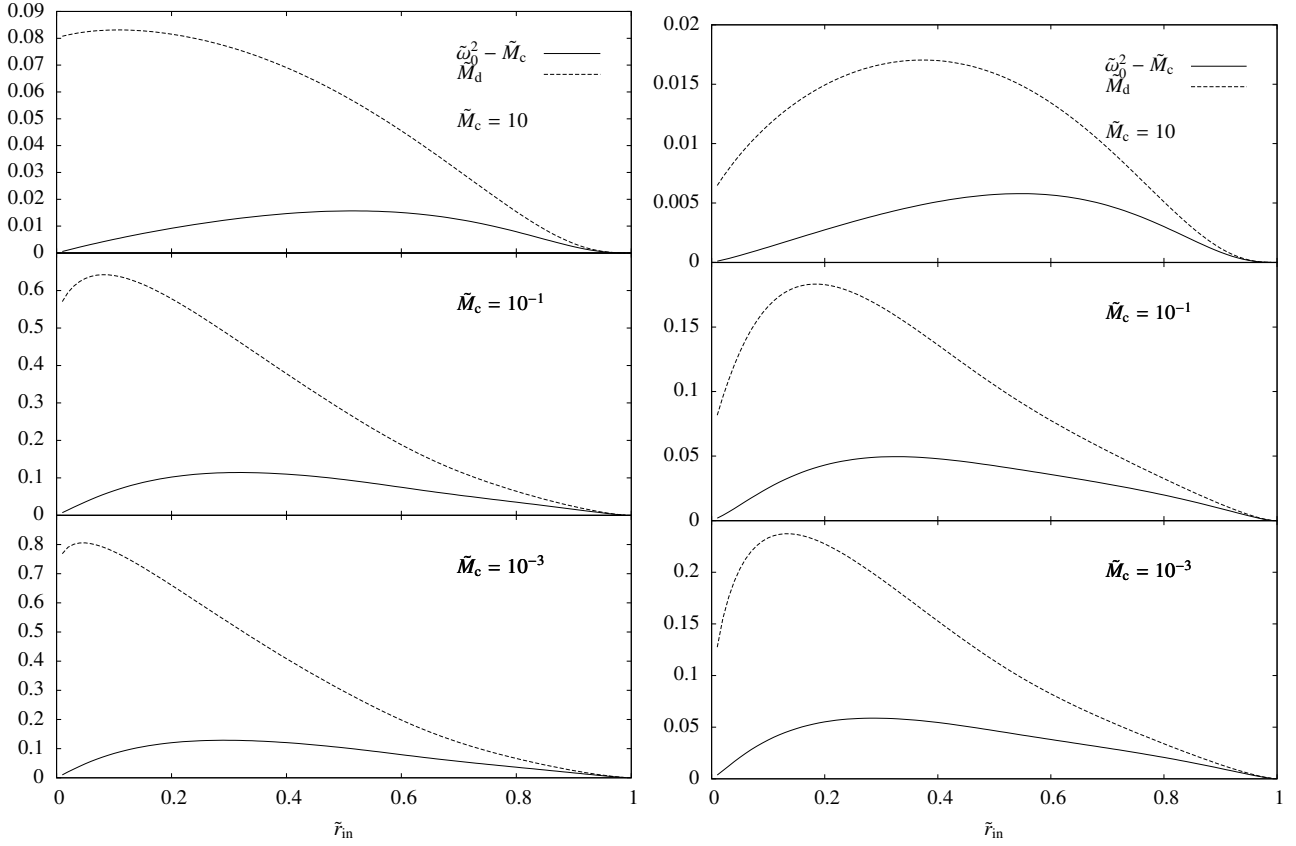
1.5. Wyniki

Numeryczne rozwiązania kilku tysięcy różnych konfiguracji potwierdziły przewidywania teoretyczne dotyczące stałej w prawie rotacji wyrażonej równościami (1.13) i (1.14). Wyniki numeryczne pozostają również w pełnej zgodności z analizowanymi przypadkami granicznymi.

Wykresy na rysunku 1.1 przedstawiają zależność $\tilde{\delta} = \tilde{\omega}_0^2 - \tilde{M}_c$ oraz $\tilde{M}_d$ od promienia wewnętrznego dysku $\tilde{r}_{\text{in}}$ dla różnych wartości masy centralnej $\tilde{M}_c$. Potwierdzają one tezy postawione w sekcji 1.2.2. W przeskalowanych zmiennych można je zapisać jako $\tilde{M}_c \leq \tilde{\omega}_0^2 \leq \tilde{M}_c + \tilde{M}_d$ lub równoważnie $0 \leq \tilde{\omega}_0^2 - \tilde{M}_c \leq \tilde{M}_d$. Widać również, że $\tilde{\omega}_0^2 \rightarrow \tilde{M}_c$ w granicach $\tilde{r}_{\text{in}} \rightarrow 0$ oraz $\tilde{r}_{\text{in}} \rightarrow 1$.

Wykresy na rysunkach 1.2 i 1.3 przedstawiają porównanie różnic $\tilde{\omega}_0^2 - \tilde{M}_c$ oraz $\tilde{\omega}_0^2/\tilde{M}_c - 1$ w funkcji $\tilde{r}_{\text{in}}$ dla różnych wartości masy centralnej. Różnice te stają się coraz mniejsze w miarę wzrostu masy centralnej i w granicy płynu testowego zachodzi równość $\tilde{\omega}_0^2 = \tilde{M}_c$.

Innym interesującym przypadkiem granicznym jest układ z $\tilde{M}_c = 0$, czyli bez centralnej masy punktowej. Obserwuje się wtedy prawidłowość $\tilde{\omega}_0^2(\tilde{r}_{\text{in}}, \tilde{M}_c = 0) > \tilde{\omega}_0^2(\tilde{r}_{\text{in}}, \tilde{M}_c \neq 0)$. Ponadto można stwierdzić, że dla różnych mas centralnych różnica $\tilde{\delta}$ osiąga maksimum dla różnych



Rysunek 1.1. Zależności $\tilde{\omega}_0^2 - \tilde{M}_c$ (linia ciągła) oraz $\tilde{M}_d$ (linia przerywana) w funkcji promienia wewnętrznego $\tilde{r}_{in}$ dla różnych wartości masy centralnej $\tilde{M}_c = 10, 10^{-1}$ i 10^{-3} . Wykresy z lewej strony sporządzone zostały dla wykładnika politropy $\gamma = 5/3$, z prawej dla $\gamma = 4/3$.

wartości $\tilde{r}_{in}$. Dla ustalonego wykładnika politropy γ istnieje konfiguracja z $\tilde{M}_c = 0$ oraz pewnym promieniem wewnętrznym, taka, że $\tilde{\delta}$ jest maksymalna, co można wyrazić relacją

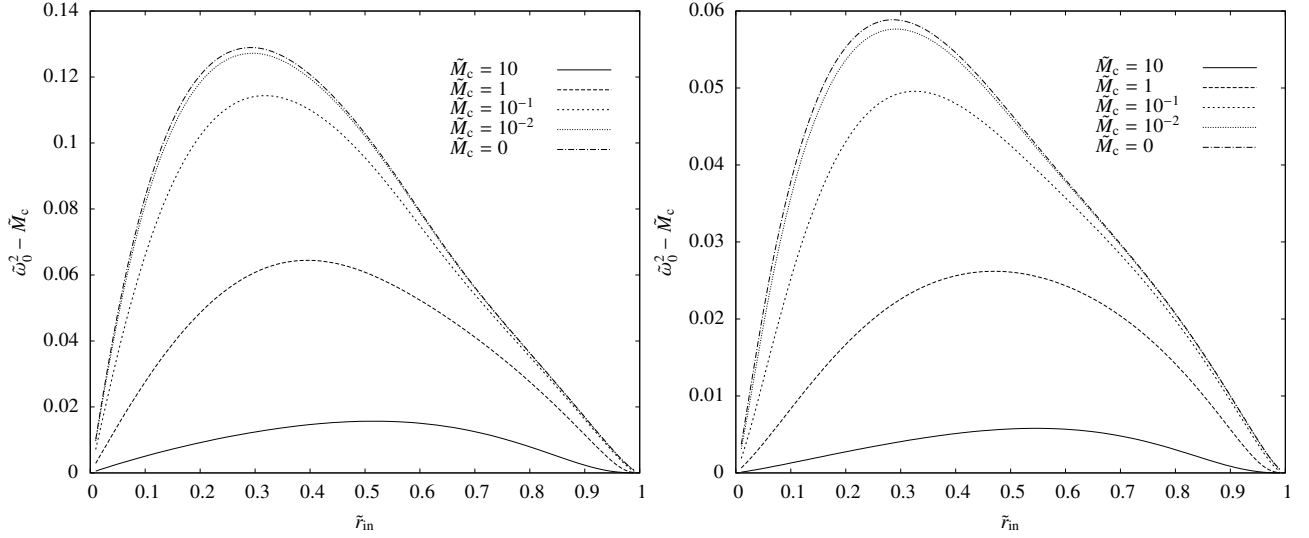
$$\frac{\tilde{\omega}_0^2}{\tilde{M}_c} \leq 1 + \frac{A}{\tilde{M}_c}, \quad (1.39)$$

gdzie A jest stałą charakterystyczną dla danego wykładnika politropy. W analizowanych przypadkach $A = 0.13$ dla $\gamma = 5/3$ oraz $A = 0.06$ dla $\gamma = 4/3$. Masa centralna ma więc znacznie większy wpływ na rotację niż masa dysku, a sama stała ω_c wyraża się skomplikowaną funkcją zależną od szeregu parametrów takich jak geometria czy równanie stanu.

Otrzymane numerycznie konfiguracje odpowiadają szerokiej klasie rozwiązań, od bardzo grubego dysku ($\tilde{M}_c = 0$), przez pośrednie przypadki, skończywszy na płynie testowym ($\tilde{M}_c \rightarrow \infty$). Dla ustalonego promienia wewnętrznego $\tilde{r}_{in}$ względna wysokość dysku $H/(r_{out} - r_{in})$ jest monotonicznie malejącą funkcją masy centralnej $\tilde{M}_c$, przy założeniu, że dysk rozciąga się w granicach $z \in \langle -H, H \rangle$. W takim razie znajomość stosunku r_{in}/r_{out} oraz względnej grubości dysku H jednoznacznie wyznacza rozwiązanie oraz stosunki $\tilde{\omega}_0^2/\tilde{M}_c$ oraz $\tilde{M}_d/\tilde{M}_c$.

Wykresy na rysunku 1.4 przedstawiają zależność $\tilde{\omega}_0^2/\tilde{M}_c$ od stosunku mas obu składników $\tilde{M}_d/\tilde{M}_c$ w zakresach $0 < \tilde{M}_d/\tilde{M}_c < 1$ oraz $0 < \tilde{r}_{in} < 0.5$. Są one potwierdzeniem przewidywania, że w trzech omawianych szczególnych przypadkach, występuje ściśle keplerowski charakter rotacji. W szczególności dla bardzo rozciągniętego dysku o bardzo małym promieniu wewnętrznym rotacja jest zdominowana przez jej potencjał pomimo obecności ciężkiego dysku.

Uwzględnienie samograwitacji dysku przyspiesza rotację. Rachunki numeryczne potwierdzają tezę, że znaczącego efektu należy spodziewać się dla porównywalnych wartości mas $\tilde{M}_c$ oraz



Rysunek 1.2. Zależność $\tilde{\omega}_0^2 - \tilde{M}_c$ w funkcji promienia wewnętrznego $\tilde{r}_{in}$ dla różnych mas centralnych $\tilde{M}_c$. Wykres z lewej strony sporządzony został dla wykładnika politropy $\gamma = 5/3$, z prawej dla $\gamma = 4/3$.

$\tilde{M}_d$ dla pewnych charakterystycznych wartości promienia wewnętrznego. Efekt ten nie jest silny i słabo zależy od równania stanu. Na ten przykład, dla $\tilde{r}_{in} = 0.5$ otrzymuje się $\tilde{\omega}_0^2 = 1.3$ oraz $\tilde{\omega}_0^2 = 1.4$ dla $\gamma = 5/4$ i $\gamma = 4/3$ odpowiednio.

1.6. Wirialne testy poprawności rachunków numerycznych w modelu OPN

Dla równań hydrodynamiki można zapisać klasyczną relację wirialną [16] postaci

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3x \frac{1}{2} \rho U + 2 \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 + 2 \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \frac{3}{2} p = 0, \quad (1.40)$$

gdzie $\rho = M_c \delta^{(3)}(\mathbf{x}) + \varrho$, $U = U_{\text{kep}} + U_d$ oraz $\Delta U_{\text{kep}} = 4\pi G M_c \delta^{(3)}(\mathbf{x})$, $\Delta U_d = 4\pi G \varrho$. Podejście tego typu nie jest właściwe dla rozważanego układu ze względu na deltę Diraca występującą w wyrażeniu na potencjał Keplerowski. korzysta się więc z metody zaproponowanej w pracy [17]. Rozważmy wektor

$$\mathbf{w} = \left((\mathbf{x} \cdot \nabla) U_d + \frac{1}{2} U_d \right) \nabla U_d - \frac{1}{2} \mathbf{x} |\nabla U_d|^2 + 4\pi G p \mathbf{x} \quad (1.41)$$

i jego dywergencję

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = 4\pi G \left(\frac{1}{2} \varrho U_d + \varrho \mathbf{x} \cdot \nabla U_d + \mathbf{x} \cdot \nabla p + 3p \right). \quad (1.42)$$

Z równania Eulera dostaje się

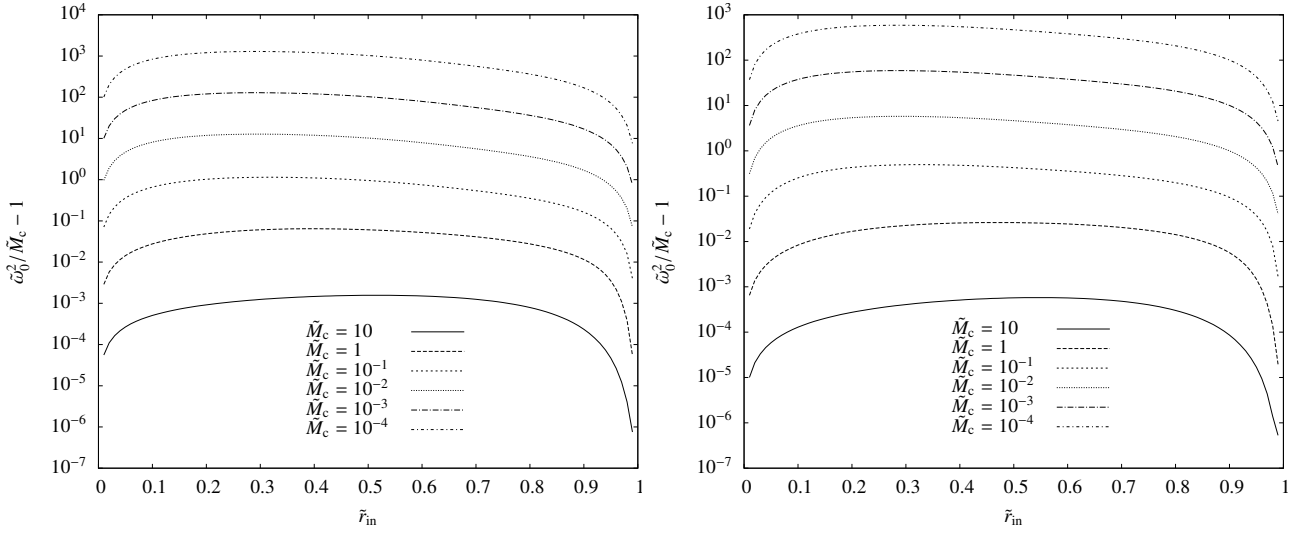
$$\varrho \mathbf{x} \cdot \nabla U_d + \mathbf{x} \cdot \nabla p = -\varrho \mathbf{x} \cdot \nabla U_{\text{kep}} - \varrho \mathbf{x} \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}. \quad (1.43)$$

Dla potencjału keplerowskiego zachodzi $-\mathbf{x} \cdot \nabla U_{\text{kep}} = U_{\text{kep}}$, zatem

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = 4\pi G (\varrho(U + U_{\text{kep}})/2 - \varrho \mathbf{x} \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + 3p). \quad (1.44)$$

Z powyższej formuły widać, że dywergencja $\nabla \cdot \mathbf{w}$ znika poza dyskiem, natomiast z (1.41) wynika, że

$$|\mathbf{x}|^2 \mathbf{w} \rightarrow 0, \quad \text{przy} \quad |\mathbf{x}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty. \quad (1.45)$$



Rysunek 1.3. Zależność $\tilde{\omega}_0^2/\tilde{M}_c - 1$ w funkcji promienia wewnętrznego $\tilde{r}_{in}$ dla różnych mas centralnych $\tilde{M}_c$. Wykres z lewej strony sporządzony został dla wykładnika politropy $\gamma = 5/3$, z prawej dla $\gamma = 4/3$.

Całkując równanie (1.44), następnie wykorzystując twierdzenie Gaussa można otrzymać

$$4\pi G \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left[\varrho(U + U_{\text{kep}})/2 + \varrho|\mathbf{v}|^2 + 3p \right] = 0. \quad (1.46)$$

Interpretując poszczególne człony można równoważnie napisać

$$E_{\text{pot}} + 2E_{\text{kin}} + 2E_{\text{therm}} = 0, \quad (1.47)$$

gdzie $E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \varrho(U - GM_c/|\mathbf{x}|)$ to całkowita energia potencjalna, $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \varrho v_i v^i$ to całkowita energia kinetyczna, $E_{\text{therm}} = \frac{3}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x p$ to całkowita energia wewnętrzna. Ze względów praktycznych warunek do przetestowania przyjmuje postać

$$\epsilon = \frac{E_{\text{pot}} + 2E_{\text{kin}} + 2E_{\text{therm}}}{E_{\text{pot}}} = 0. \quad (1.48)$$

W tabelach 1.1-1.3 zamieszczone są testy zbieżności dla typowej konfiguracji dyskowej otrzymanej i przetestowanej opisanymi powyżej metodami. Numeryczna precyzja jest tutaj kontrolowana przez trzy parametry: rozdzielczość siatki numerycznej, liczbę wielomianów Legendre'a użytych w rozwinięciu kątowym dla metody numerycznej rozwiązującej równanie Poissona oraz przez parametr tolerancji ϱ_{tol} .

Tabela 1.1 przedstawia zależność wyników ($\tilde{\omega}_0$ oraz wyniku testu wirialnego ϵ) od rozdzielczości siatki numerycznej, liczby użytych wielomianów L , oraz parametru tolerancji $\tilde{\varrho}_{\text{tol}}$. W tym przypadku model zakładał $\tilde{M}_c = 1$, $\tilde{r}_{in} = 0.3$, $\gamma = 5/3$. Otrzymana masa dysku dla tej konfiguracji wyniosła $\tilde{M}_d \approx 0.29$.

Tabele 1.2 i 1.3 prezentują zbieżność metody w zależności od wartości masy punktowej $\tilde{M}_c$ (lub równoważnie od stosunku M_c/M_d). Dane zostały otrzymane dla $L = 200$, $\gamma = 5/3$, $\tilde{r}_{in} = 0.3$ i $\tilde{\varrho}_{\text{tol}} = 10^{-5}$. Tabela 1.2 zawiera dane dla przypadku $\tilde{M}_c = 0$ (gdzie masa dysku wyniosła $\tilde{M}_d \approx 0.49$). Tabela 1.3 zawiera dane dla przypadku $\tilde{M}_c = 10$ ($\tilde{M}_d \approx 1.4 \times 10^{-2}$).

Należy zwrócić uwagę, że wyniki testów zależą mocno od rozdzielczości siatki numerycznej. Otrzymane wartości pozostają w zgodzie z wynikami przedstawionymi w pracy [23] gdzie wyniki numeryczne testowane były właśnie ze względu na rozdzielczość.

Tabela 1.1. Zależność otrzymanych wyników od rozdzielczości, liczba wielomianów Legendre’a użytych w rozwinięciu kątowym dla metody numerycznej rozwiązującej równanie Poissona oraz parametru tolerancji ϱ_{tol} .

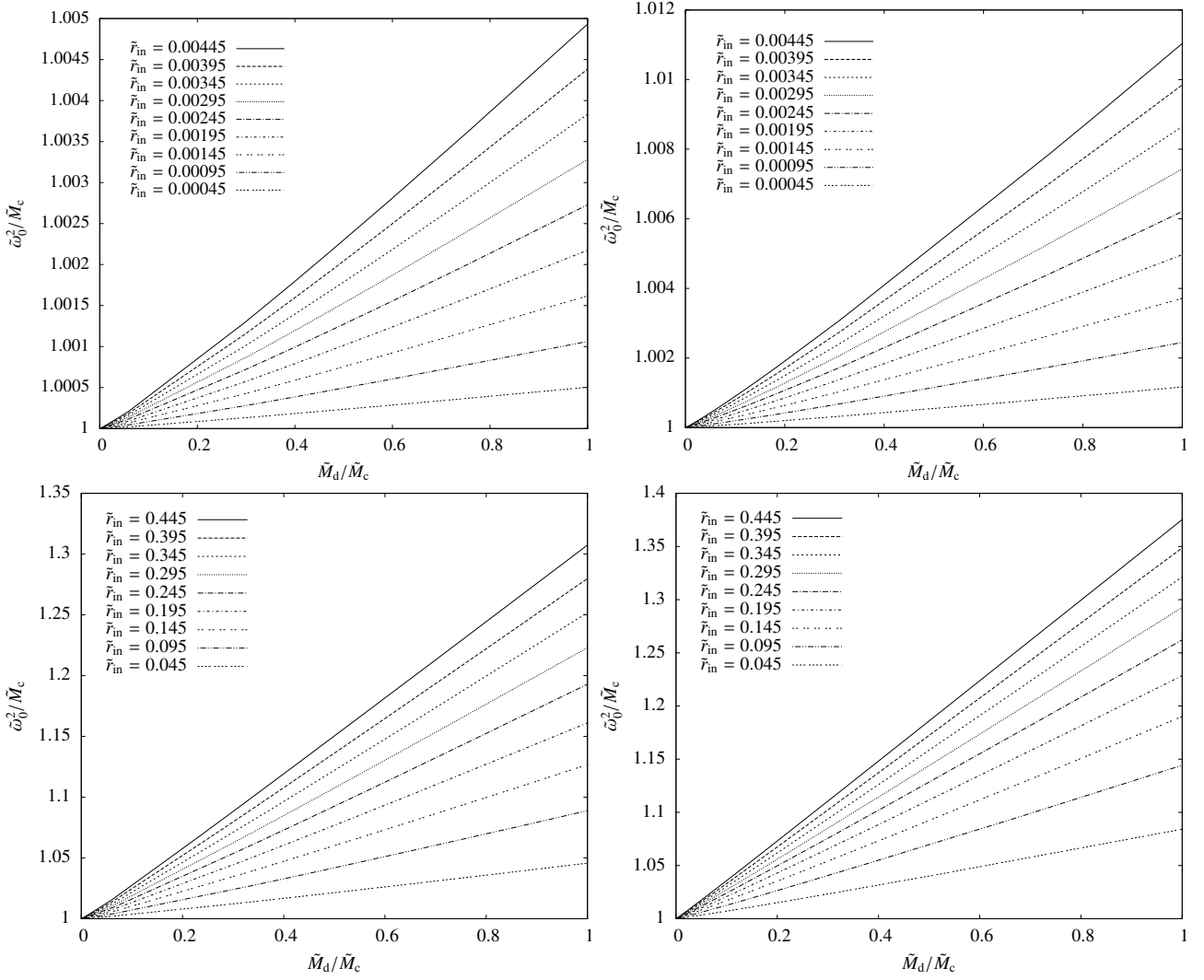
rozdzielczość	L	$\tilde{\varrho}_{\text{tol}}$	$\tilde{\omega}_0$	ϵ
100×100	200	10^{-5}	1.029945714	2.22×10^{-5}
200×200	200	10^{-5}	1.029948775	5.49×10^{-6}
400×400	200	10^{-5}	1.029949540	1.30×10^{-6}
800×800	200	10^{-5}	1.029949076	2.45×10^{-7}
1600×1600	200	10^{-5}	1.029949123	1.67×10^{-8}
3000×3000	200	10^{-5}	1.029949140	7.92×10^{-8}
5000×5000	200	10^{-5}	1.029949137	9.51×10^{-8}
100×100	200	10^{-6}	1.029945714	2.22×10^{-5}
200×200	200	10^{-6}	1.029948775	5.49×10^{-6}
400×400	200	10^{-6}	1.029949540	1.30×10^{-6}
800×800	200	10^{-6}	1.029949076	2.45×10^{-7}
1600×1600	200	10^{-6}	1.029949123	1.67×10^{-8}
3000×3000	200	10^{-6}	1.029948709	2.54×10^{-8}
5000×5000	200	10^{-6}	1.029948705	4.13×10^{-8}
2400×2400	100	10^{-5}	1.029948963	7.35×10^{-7}
2400×2400	200	10^{-5}	1.029949132	6.53×10^{-7}
2400×2400	300	10^{-5}	1.029949145	6.47×10^{-7}
2400×2400	400	10^{-5}	1.029949147	6.46×10^{-7}
2400×2400	500	10^{-5}	1.029949148	6.45×10^{-7}

Tabela 1.2. Zależność otrzymanych wyników od rozdzielczości dla masywnego dysku w przypadku gdy $\tilde{M}_c = 0$ oraz $\tilde{\varrho}_{\text{tol}} = 10^{-5}$ i $L = 200$.

rozdzielczość	$\tilde{\omega}_0$	ϵ
100×100	0.339018059	1.32×10^{-4}
200×200	0.339031477	3.67×10^{-5}
400×400	0.339034828	1.29×10^{-5}
800×800	0.339035663	6.99×10^{-6}
1600×1600	0.339035431	5.51×10^{-6}
3000×3000	0.339035495	5.15×10^{-6}
5000×5000	0.339035486	5.06×10^{-6}

Tabela 1.3. Zależność otrzymanych wyników od rozdzielczości dla lekkiego dysku w przypadku gdy $\tilde{M}_c = 10$ oraz $\tilde{\varrho}_{\text{tol}} = 10^{-5}$ i $L = 200$.

rozdzielczość	$\tilde{\omega}_0$	ϵ
100×100	3.164121422	1.14×10^{-6}
200×200	3.164121530	2.32×10^{-7}
400×400	3.164121439	1.25×10^{-9}
800×800	3.164121436	5.66×10^{-8}
1600×1600	3.164121424	7.12×10^{-8}
3000×3000	3.164121425	7.46×10^{-8}
5000×5000	3.164121425	7.55×10^{-8}



Rysunek 1.4. Zależności $\tilde{\omega}_0^2/\tilde{M}_c$ od $\tilde{M}_d/\tilde{M}_c$ dla różnych wartości $\tilde{r}_{in}$. Wykresy z lewej strony sporządzone zostały dla wykładnika politropy $\gamma = 5/3$, z prawej dla $\gamma = 4/3$.

1.7. Szacowanie mas obiektów astronomicznych na przykładzie NGC4258

W literaturze astrofizycznej typowym podejściem do keplerowskich krzywych rotacji jest założenie, że dynamika zdeterminowana jest przez centralną masę M_c , przy założeniu, że jest ona znacznie większa od masy dysku M_d . Tego typu rozumowanie przeprowadzone zostało w pracy [2]. Analiza przeprowadzona w rozdziale 1.6 pokazuje, że dla porównywalnych mas obu składników na częstość rotacji wpływ mają oba komponenty, a wpływ ten nie przejawia się w prosty (np. addytywny) sposób. W pracy [24] opracowana została fenomenologiczna formuła pozwalająca na określenie proporcji pomiędzy masami przy znajomości parametrów geometrycznych dysku wykazującego rotację keplerowską.

Definiuje się następujące zmienne: $x := M_d/M_c$, $y := r_{in}/r_{out}$. Korzystając z relacji (1.14) i prawa rotacji (1.1), można napisać

$$\frac{\omega_0^2}{GM_c} = 1 + \delta'(r_{in}, M_c, \varrho), \quad (1.49)$$

gdzie $\delta'(r_{in}, M_c, \varrho) = \delta(r_{in}, M_c, \varrho)/(GM_c)$. Metodami numerycznymi przeanalizowanych zostało

bardzo wiele przypadków dla różnych wykładników politropy ($\gamma = 4/3$, $\gamma = 5/3$, oraz pośrednich), dla różnych relacji pomiędzy masami, masą centralną oraz masą dysku x oraz dla różnych relacji pomiędzy promieniami, wewnętrznym i zewnętrznym y . Na przykładzie $\gamma = 5/3$ pokazane jest w [24], że funkcję $\delta'(r_{\text{in}}, M_c, \varrho)$ można aproksymować następującą fenomenologiczną formułą

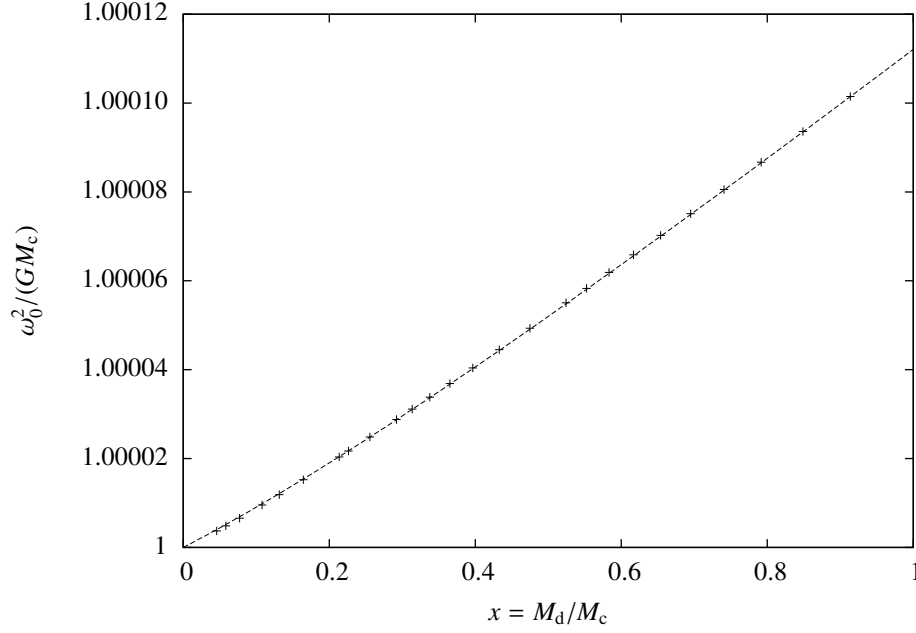
$$\delta'(r_{\text{in}}, M_c, \varrho) = x f(y) \frac{g(y) + x}{h(y) + x}, \quad (1.50)$$

gdzie

$$\begin{aligned} f(y) &= 1.322y - 3.719y^2 + 13.47y^3 - 44.48y^4 \\ &\quad + 116.9y^5 - 206.2y^6 + 208.9y^7 - 90.60y^8, \\ g(y) &= 0.4778 + 0.9495y - 31.67y^2 + 258.4y^3 \\ &\quad - 1431y^4 + 5169y^5 - 11100y^6 + 12760y^7 \\ &\quad - 6034y^8, \\ h(y) &= 0.7423 + 0.6313y - 43.57y^2 + 375y^3 \\ &\quad - 2059y^4 + 7281y^5 - 15390y^6 + 17520y^7 \\ &\quad - 8242y^8. \end{aligned}$$

Funkcje f , g , h są nieujemne i mniejsze od 1 dla $y \in \langle 0, 1 \rangle$. Z równania (1.50) wynika, że masa centralna jest zawsze mniejsza od wielkości $\Omega r^3 / G$ oraz że dla przypadku gdy $M_d < M_c$ rotacja jest niemalże ściśle keplerowska jeżeli tylko r_{in} jest odpowiednio małe.

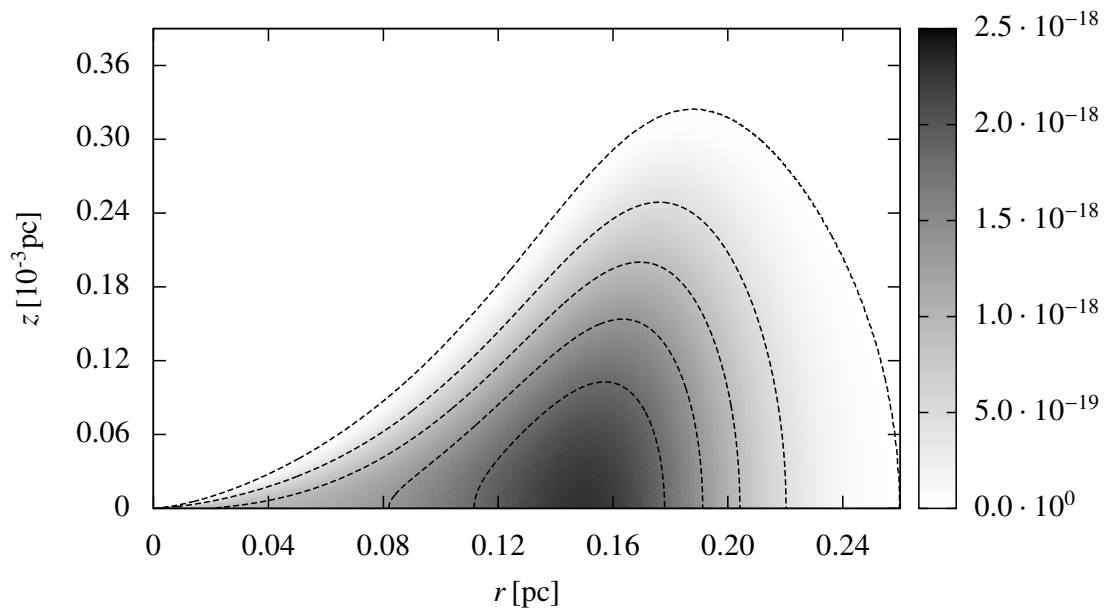
W ostatnim czasie pojawiło się wiele nowych danych astronomicznych dotyczących aktywnych jąder galaktyk (AGN) emitujących promieniowanie maserowe [25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32]. Układ NGC4258 wyróżnia się spośród nich najdokładniej wyznaczonymi parametrami, stanowiąc tym samym najodpowiedniejszy przykład prezentacji metody. Dzięki detekcji promieniowania maserowego potwierdzona została keplerowska rotacja układu. Znana jest również jego masa centralna $[M_c = (3.9 \pm 0.3) \times 10^7 M_\odot]$ według autorów [2]. Inne doniesienia mówią o $M_c = (3.3 \pm 0.2) \times 10^7 M_\odot$ [33]. Dla potrzeb poniższych rachunków przyjęto średnią arytmetyczną powyższych wartości i założono, że związany z masą centralną *promień Schwarzschilda* dla tego układu wynosi $R_s := GM_c/c^2 = 5.8 \times 10^{12}$ cm. Istnieją przesłanki świadczące o tym, że dysk w tym przypadku znajduje się również poza obszarem obserwacji promieniowania maserowego, mianowicie, że sięga bardzo blisko centralnej masy [34]. W rachunkach przyjęto się wartość promieni $r_{\text{in}} = 2.6 \times 10^{-5}$ pc, $r_{\text{out}} = 0.26$ pc. Z obserwacji astronomicznych znana jest ponadto względna grubość dysku, która stanowi 1/800 odległości jego zewnętrznego brzegu od centrum. Analizując równanie (1.50) oraz rysunek 1.5 łatwo sprawdzić, że w przypadku gdy $M_d \leq M_c$ wyrażenie $\Omega/(GM_c) \approx 1$ (z dokładnością do 0.001). Przy założeniu wspomnianych parametrów geometrycznych oraz $\gamma = 5/3$ na podstawie numerycznych rachunków otrzymuje się oszacowanie masy dysku w tym układzie $M_d = 2.62 \times 10^{-6} M_c = 100 M_\odot$. W rachunkach numerycznych wzięto pod uwagę również modele o innych wykładnikach politropy. Badania wykazały, że oszacowania masy słabo zależą od równania stanu. Przy założeniu $\gamma = 4/3$ oszacowanie na masę dysku wyniosło $M_d = 190 M_\odot$. W rzeczywistości okazać się może, że dysk rozciąga się znacznie dalej niż 0.26 pc. W takim przypadku należałoby się spodziewać, że jego masa może być większa. Metoda ta pozwala w związku z tym tak naprawdę na oszacowanie dolnej granicy. Otrzymany modelowy profil gęstości rozważanego dysku przedstawia rysunek 1.6.



Rysunek 1.5. Zależność wielkości $\omega_0^2/(GM_c)$ od stosunku mas x . Wykres sporządzony dla wykładnika politropy $\gamma = 5/3$ oraz $r_{\text{in}}/r_{\text{out}} = 10^{-4}$. Przerywana linia oznacza dopasowaną funkcję (1.50). Zaznaczone punkty oznaczają otrzymane numeryczne wartości dla różnych mas centralnych M_c .

1.8. Newtonowskie układy dyskowe – wnioski

W oparciu o tysiące rozwiązań numerycznych przeprowadzonych dla politropowego modelu stacjonarnych, osiowo-symetrycznych keplerowskich dysków zostało pokazane wprost, że ciężki dysk może rotować zgodnie z keplerowskim prawem rotacji (1.1). Proporcje pomiędzy masami, masą centralną i masą dysku mogą zostać określone pod warunkiem znajomości dwóch geometrycznych parametrów, mianowicie: rozmiarów radialnych dysku r_{in} i r_{out} , oraz jego względnej grubości $H/(r_{\text{out}} - r_{\text{in}})$. Dzięki przeprowadzonej analizie można także odpowiedzieć na pytanie na ile wiarygodne są oszacowania masy w keplerowskich układach, czynione na podstawie założenia, że ich rotacja jest ściśle keplerowska. Numeryczne rachunki pokazały, że ruch taki odbywa się z prędkością kątową większą niż $\sqrt{GM_c} r^{-3/2}$, ale mniejszą niż $\sqrt{G(M_c + M_d)} r^{-3/2}$. Można wyróżnić ponadto trzy jakościowo różne modele dysków dla których rotacja jest ściśle keplerowska. Są to przypadki bardzo mocno rozciągniętych dysków z małym promieniem wewnętrznym usytuowanym bardzo blisko masy punktowej, przypadki dysków o kształcie obręczy, których promień wewnętrzny oddalony jest znacznie od centralnej masy punktowej, oraz przypadki płynu testowego, w których masa dysku jest wielokrotnie mniejsza od masy centralnej. W ogólności jednak tego typu układy nie rotują w sposób ściśle keplerowski, a grawitacja dysku ma wpływ na dynamikę układu oraz przebieg krzywej rotacji.



Rysunek 1.6. Rozkład gęstości materii dyskowej dla przypadku $\gamma = 5/3$ dla którego parametry geometryczne zgadzają się z wyznaczonymi obserwacyjnie parametrami AGN NGC 4258. Użyte jednostki gęstości to g/cm^3 .

Rozdział 2

Układy post-newtonowskie

2.1. Konstrukcja modeli dysków post-newtonowskich

2.1.1. Opis w układzie kartezjańskim

Rozdział ten, oparty na publikacji [13] zawiera ogólnorelatywistyczną analizę dyskutowanych wcześniej układów. Przyjęta została konwencja w której tensor metryczny ma sygnaturę $(-, +, +, +)$ i w której równania Einsteina mają postać

$$R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} \frac{R}{2} = 8\pi \frac{G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

gdzie $T_{\mu\nu}$ jest tensorem energii-pędu-napięć. Składowe tensora metrycznego określającego najbardziej ogólną geometrię w pierwszym przybliżeniu post-newtonowskim mają postać:

$$g_{00} = -1 - \frac{2}{c^2} U - \frac{2}{c^4} U^2 + \mathcal{O}(c^{-6}), \quad (2.2)$$

$$g_{0i} = \frac{1}{c^3} A_i + \mathcal{O}(c^{-5}), \quad (2.3)$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} \left(1 - \frac{2}{c^2} U \right) + \mathcal{O}(c^{-4}). \quad (2.4)$$

Element liniowy w takiej geometrii wyraża się z dokładnością do członów 1PN jak następuje:

$$ds^2 = \left(-1 - 2 \frac{U(x, y, z)}{c^2} - 2 \frac{(U(x, y, z))^2}{c^4} \right) (dx^0)^2 + \\ - 2 \frac{A_i(x, y, z)}{c^3} dx^i dx^0 + \left(1 - 2 \frac{U(x, y, z)}{c^2} \right) (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (2.5)$$

Symbol A_i oznacza tzw. *potencjał rotacyjny*. Powyższe wzory wypisane zostały w kartezjańskich współrzędnych, dla których $x = x^1, y = x^2, z = x^3, x^0 = ct$, w *standardowym post-newtonowskim cechowaniu*:

$$\partial_j g_{0j} - \frac{1}{2} \partial_0 g_{jj} = \mathcal{O}(c^{-5}), \quad (2.6)$$

$$\partial_j g_{ij} - \frac{1}{2} \partial_i (g_{jj} - g_{00}) = \mathcal{O}(c^{-4}). \quad (2.7)$$

Tensor energii-pędu-napięć dla rozważanego modelu materii ma postać

$$T^{\alpha\beta} = T_{\text{BH}}^{\alpha\beta} + T_{\text{d}}^{\alpha\beta}, \quad (2.8)$$

gdzie $T_{\text{BH}}^{\alpha\beta}$ opisuje punktową masę znajdującą się w środku układu współrzędnych, natomiast $T_{\text{d}}^{\alpha\beta}$ związany jest z materią dyskową. Tensor $T_{\text{BH}}^{\alpha\beta}$ jest proporcjonalny do delty Diraca

$$T_{\text{BH}}^{\alpha\beta} = \frac{M_c c^2}{\sqrt{g}} \frac{u_{\text{BH}}^\alpha u_{\text{BH}}^\beta}{u_{\text{BH}}^0} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{z}_{\text{BH}}(t)), \quad (2.9)$$

gdzie M_c jest parametrem utożsamianym z masą cząstki punktowej. Definiuje się wielkości takie jak wyznacznik z macierzy tensora metrycznego $g := -\det(g_{\mu\nu})$ oraz czteropędkość wzdłuż linii świata cząstki $u_{\text{BH}}^\alpha := dz_{\text{BH}}^\alpha / (c d\tau_{\text{BH}})$, która jest parametryzowana przez jej czas własny τ_{BH} . Przy założeniu, że cząstka ta znajduje się w spoczynku, w środku układu współrzędnych $\mathbf{z}_{\text{BH}}(t) = \mathbf{0}$, tensor $T_{\text{BH}}^{\alpha\beta}$ upraszcza się do

$$T_{\text{BH}}^{00} = \frac{M_c c^2}{\sqrt{g}} u_{\text{BH}}^0 \delta^{(3)}(\mathbf{x}), \quad T_{\text{BH}}^{0i} = T_{\text{BH}}^{ij} = 0. \quad (2.10)$$

Dla płynu politropowego tensor energii-pędu-napięć dla materii dyskowej przyjmuje postać

$$T_{\text{d}}^{\alpha\beta} = \varrho(c^2 + h)u^\alpha u^\beta + p g^{\alpha\beta}, \quad (2.11)$$

gdzie ϱ to gęstość barionowa, h to entalpia właściwa, p to ciśnienie. Czteropędkość normalizowana jest według wzoru $g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = -1$ i dana jest standardową formułą $u^\alpha := dx^\mu / (c d\tau)$, gdzie τ jest czasem własnym wzdłuż linii świata cząstek płynu. Wprowadzając definicje $\mathbf{v}^2 := \delta_{ij}v^i v^j$, $v^i := dx^i/dt$, łatwo przekonać się, że składowe czteropędkości można zapisać jak następuje

$$\begin{aligned} u^0 &= 1 + c^{-2} \left(\frac{1}{2} v_i v^i + U \right) - c^{-3} \left(\frac{1}{2} A_i v^i \right), \\ u^i &= \frac{v^i}{c} \left[1 + c^{-2} \left(\frac{1}{2} v_i v^i + U \right) - c^{-3} \left(\frac{1}{2} A_i v^i \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Ogólnorelatywistyczny opis wymaga wprowadzenia nowej wielkości termodynamicznej (poza gęstością barionową, występującą w prawie zachowania (2.20)), mianowicie gęstości energii właściwej e , związanej z entalpią właściwą relacją

$$h = \frac{e + p}{\varrho} - c^2. \quad (2.13)$$

W przypadku relatywistycznym, politropowe równanie stanu przybiera postać

$$e(\varrho, S) = \varrho c^2 + \frac{K(S)}{\gamma - 1} \varrho^\gamma, \quad (2.14)$$

gdzie S jest entropią właściwą. Przy tak zdefiniowanych wielkościach termodynamicznych oraz założeniu stałości entropii słuszne są następujące związki

$$p(\varrho, S) = \varrho \left(\frac{\partial e}{\partial \varrho} \right)_S - e = K \varrho^\gamma, \quad (2.15)$$

$$h(\varrho, S) = K \frac{\gamma}{\gamma - 1} \varrho^{\gamma-1}. \quad (2.16)$$

Równania (2.1) w tak sformułowanym zagadnieniu przyjmują postać

$$\Delta U = -\frac{4\pi G}{c^2} \sqrt{g} (T_i^i - T_0^0) + \mathcal{O}(c^{-4}), \quad (2.17)$$

$$\Delta A_i = -16\pi \frac{G}{c} T^{0i} + \mathcal{O}(c^{-2}), \quad (2.18)$$

których uzupełnieniem jest zestaw praw zachowania, to znaczy relatywistyczne równanie Eulera oraz wspomniane wyżej prawo zachowania prądu barionowego

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0, \quad (2.19)$$

$$\nabla_\alpha (\varrho u^\alpha) = 0. \quad (2.20)$$

Pomijając wyrazy małe, tj. $\mathcal{O}(c^{-4})$ i $\mathcal{O}(c^{-2})$, można przepisać kolejno równania Poissona na potencjały grawitacyjny U i rotacyjny A_i w postaci

$$\Delta U = 4\pi G \left(\varrho + M_c(1 + c^{-2}U)\delta^{(3)}(\mathbf{x}) + c^{-2} \left(2p + \varrho(h - 2U + 2\mathbf{v}^2) \right) \right), \quad (2.21)$$

$$\Delta A_i = -16\pi G \varrho v_i, \quad (2.22)$$

równanie Eulera

$$\begin{aligned} & \partial_j \left(\varrho v^i v^j + c^{-2} \varrho v^j \left(-A_i + v^i(h - 6U + \mathbf{v}^2) \right) + (1 - 2c^{-2}U)p \delta_i^j \right) = \\ & - \left(\varrho + M_c(1 + c^{-2}U)\delta^{(3)}(\mathbf{x}) + c^{-2} \left(2p + \varrho(h - 2U + 2\mathbf{v}^2) \right) \right) \partial_i U - c^{-2} \varrho v^j \partial_i A_j, \end{aligned} \quad (2.23)$$

oraz równanie ciągłości

$$0 = \partial_i (\sqrt{g} u^0 \varrho v^i) = \partial_i \left(\varrho v^i + c^{-2} \varrho v^i \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 - 3U \right) \right) + \mathcal{O}(c^{-4}). \quad (2.24)$$

2.1.2. Opis w układzie cylindrycznym – warunki osiowej symetrii

W tym punkcie dotychczasowe rozważania zostaną zawężone przez przyjęcie założeń modelowych o obrotowej symetrii oraz symetrii odbiciowej względem płaszczyzny równikowej. Opis prowadzony będzie w zależności od potrzeb we współrzędnych kartezjańskich (łacińskie indeksy) oraz we współrzędnych cylindrycznych (r, ϕ, z) , gdzie $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$.

W osiowej symetrii, w cylindrycznym układzie współrzędnych, trójwektory opisujące potencjał rotacyjny oraz prędkość kątową mają tylko jedną niezerową składową. Wektorowy potencjał rotacyjny ma postać $\mathbf{A} = A_\phi d\phi$, natomiast wektor prędkości $\mathbf{v} = \Omega \partial_\phi$. W związku z symetrią, wspomniane dwa wektory, oraz skalarne wielkości ϱ , p , h i U nie zależą od zmiennej ϕ .

W podejściu 1PN, referowanym tutaj za [13] standardowo stosowany będzie system oznaczeń w którym dana wielkość ξ rozdzielona została na część newtonowską ξ_0 oraz post-newtonowską poprawkę ξ_1 według formuły

$$\xi = \xi_0 + c^{-2} \xi_1. \quad (2.25)$$

W szczególności dla gęstości ϱ oraz prędkości kątowej Ω zachodzi

$$\varrho = \varrho_0 + c^{-2} \varrho_1, \quad (2.26a)$$

$$\Omega = \Omega_0 + c^{-2} \Omega_1. \quad (2.26b)$$

Stosując powyższe rozwinięcia otrzymuje się

$$\frac{1}{\varrho} \partial_i p = \partial_i h_0 + c^{-2} \partial_i h_1 + \mathcal{O}(c^{-4}), \quad (2.27)$$

gdzie post-newtonowska część entalpii właściwej h_1 wyraża się wzorem

$$h_1 = (\gamma - 1) h_0 \frac{\varrho_1}{\varrho_0}. \quad (2.28)$$

Korzystając z równania (2.27) łatwo sprawdzić następujące związki łączące gradient ciśnienia z entalpią właściwą

$$\partial_i p_0 = \varrho_0 \partial_i h_0, \quad (2.29)$$

$$\partial_i p_1 = \varrho_0 \partial_i h_1 + \varrho_1 \partial_i h_0. \quad (2.30)$$

Analogicznie równanie Eulera (2.23) rozdziela się na części newtonowską i post-newtonowską. Otrzymujemy odpowiednio

$$\nabla_j (\varrho_0 v_0^i v_0^j) + \partial_i p_0 = -\varrho_0 \partial_i U_0 + \partial_i U_0 M_c \delta^{(3)}(\mathbf{x}), \quad (2.31)$$

oraz

$$\begin{aligned} & \nabla_j \left(\varrho_0 (v_0^i v_1^j + v_1^i v_0^j) + \varrho_1 v_0^i v_0^j + \varrho_0 v_0^j \left(-A_i + v_0^i (h_0 - 6U_0 + r^2 \Omega_0^2) \right) + (p_1 - 2p_0 U_0) \delta_i^j \right) \\ &= -(\partial_i U_1 + U_0 \partial_i U_0) M_c \delta^{(3)}(\mathbf{x}) - \left(\varrho_1 + 2p_0 + \varrho_0 (h_0 - 2U_0 + 2r^2 \Omega_0^2) \right) \partial_i U_0 - \varrho_0 \partial_i U_1 - \varrho_0 v_0^j \partial_i A_j. \end{aligned} \quad (2.32)$$

To samo dotyczy potencjału grawitacyjnego, dla którego

$$U = U_0 + c^{-2} U_1. \quad (2.33)$$

Równania na U_0 zawierają jedynie parametry rzędu zerowego, natomiast do obliczenia U_1 potrzebna jest znajomość rozkładu post-newtonowskiej poprawki do gęstości ϱ_1

$$\Delta U_0 = 4\pi G \left(M_c \delta^{(3)}(\mathbf{x}) + \varrho_0 \right), \quad (2.34a)$$

$$\Delta U_1 = 4\pi G \left(M_c U_0 \delta^{(3)}(\mathbf{x}) + \varrho_1 + 2p_0 + \varrho_0 (h_0 - 2U_0 + 2r^2 \Omega_0^2) \right). \quad (2.34b)$$

W części newtonowskiej masa dysku obliczana była jako całka objętościowa z profilu gęstości $M_d = \int_V d^3x \varrho_0$, a masa całego układu była równa sumie $M_c + M_d$. W tym modelu post-newtonowska poprawka do masy M_{1PN} definiowana jest jako całka objętościowa ze źródła w równaniu (2.34b)

$$M_{1PN} = \int_V d^3x \, 4\pi G \left(M_c U_0 \delta^{(3)}(\mathbf{x}) + \varrho_1 + 2p_0 + \varrho_0 (h_0 - 2U_0 + 2r^2 \Omega_0^2) \right) \quad (2.35)$$

Całkowita masa układu wyraża się wzorem

$$M = M_c + M_d + \frac{1}{c^2} M_{1PN}. \quad (2.36)$$

Prawe strony równań (2.31), (2.32), i (2.34) zawierają wyrażenia proporcjonalne do delty Diraca postaci $f(\mathbf{x})\delta^{(3)}(\mathbf{x})$, gdzie funkcja f może być osobliwa w początku układu współrzędnych. Tego typu wyrazy zostały zastąpione przez $\text{Pf}_0(f)\delta^{(3)}(\mathbf{x})$, gdzie Pf_0 i oznacza części skończone Hadamarda dla funkcji rozwiniętej wokół osobliwego punktu $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Operacja $\text{Pf}_{\mathbf{x}_0}(f)$ dla funkcji f będącej osobliwą w $\mathbf{x}_0$ zdefiniowana jest jak następuje. Niech będzie dany wektor jednostkowy $\mathbf{n}$. Można zdefiniować funkcję $f_{\mathbf{n}}(\varepsilon) := f(\mathbf{x}_0 + \varepsilon \mathbf{n})$, której rozwinięcie w szereg Laurenta wokół $\varepsilon = 0$ ma postać

$$f_{\mathbf{n}}(\varepsilon) = \sum_{m=-N}^{\infty} a_m(\mathbf{n}) \varepsilon^m. \quad (2.37)$$

Skończona część funkcji f zdefiniowana jest jako współczynnik przy ε^0 uśredniony po wszystkich kierunkach:

$$\text{Pf}_{\mathbf{x}_0}(f) := \frac{1}{4\pi} \oint d\Theta a_0(\mathbf{n}). \quad (2.38)$$

Tego typu metody regularyzacji osobliwych funkcji były często używane w numerycznych procedurach obliczeniowych dla post-newtonowskich równań ruchu dla układów cząstek punktowych [35].

Rozwiązanie równania (2.34a) można symbolicznie zapisać jako

$$U_0(\mathbf{x}) = -\frac{GM_c}{|\mathbf{x}|} + U_0^d(\mathbf{x}), \quad U_0^d(\mathbf{x}) := 4\pi G(\Delta^{-1}\varrho_0)(\mathbf{x}). \quad (2.39)$$

Są to dokładnie równania (1.5) i (1.6) na potencjał newtonowski, które zostały wprowadzone w rozdziale pierwszym. Ponieważ $\text{Pf}_0(1/|\mathbf{x}|) = 0$, wyraz $U_0\delta^{(3)}(\mathbf{x})$ po prawej stronie równania (2.34b) można zastąpić przez $U_0^d(\mathbf{0})\delta^{(3)}(\mathbf{x})$ i przepisać równanie w formie

$$\Delta U_1 = 4\pi G \left(M_c U_0^d(\mathbf{0})\delta^{(3)}(\mathbf{x}) + \varrho_1 + 2p_0 + \varrho_0(h_0 - 2U_0 + 2r^2\Omega_0^2) \right). \quad (2.40)$$

Prawa strona równania (2.31) zawiera $\partial_i U_0\delta^{(3)}(\mathbf{x})$, który można zastąpić przez $\text{Pf}_0(\partial_i U_0)\delta^{(3)}(\mathbf{x})$ i zgodnie z (2.39) otrzymuje się

$$\text{Pf}_0(\partial_i U_0) = \text{Pf}_0(GM_c x^i/|\mathbf{x}|^3 + \partial_i U_0^d(\mathbf{x})) = 0 + \partial_i U_0^d(\mathbf{0}). \quad (2.41)$$

Z drugiej strony $\partial_i U_0^d(\mathbf{0}) = 0$ i ze względu na osiową i równikową symetrię całe wyrażenie równe jest zero. Podobna procedura może zostać zastosowana dla wszystkich wyrazów zawierających delty Diraca w równaniu (2.32) i na tej samej zasadzie potencjalnie osobliwe wyrazy znikają.

Newtonowska część równania Eulera we współrzędnych cylindrycznych przyjmuje postać

$$\partial_z h_0 = -\partial_z U_0, \quad (2.42a)$$

$$\partial_r h_0 - r\Omega_0^2 = -\partial_r U_0, \quad (2.42b)$$

natomiast część post-newtonowska

$$\partial_z h_1 = -\partial_z U_1 - \Omega_0 \partial_z A_\phi - (h_0 - 2U_0 - 2r^2\Omega_0^2 \partial_z U_0 + 2U_0 \partial_z h_0), \quad (2.43a)$$

$$\begin{aligned} \partial_r h_1 - 2r\Omega_0\Omega_1 - r\Omega_0^2(h_0 - 6U_0 + r^2\Omega_0^2) \\ = -\partial_r U_1 - \Omega_0 \partial_r A_\phi - (h_0 - 2U_0 - 2r^2\Omega_0^2) \partial_r U_0 + 2U_0 \partial_r h_0. \end{aligned} \quad (2.43b)$$

Wykorzystując związki (2.42) można uprościć równania (2.43) do postaci

$$-\partial_z h_1 - \partial_z U_1 - \Omega_0 \partial_z A_\phi - (h_0 + 2r^2\Omega_0^2) \partial_z U_0 = 0, \quad (2.44a)$$

$$-\partial_r h_1 - \partial_r U_1 + 2r\Omega_0\Omega_1 - \Omega_0 \partial_r A_\phi + r^3(\Omega_0)^4 + r\Omega_0^2 h_0 - 4r\Omega_0^2 U_0 - (h_0 + 2r^2\Omega_0^2) \partial_r U_0 = 0. \quad (2.44b)$$

Definiując nową wielkość Ψ jako potencjał

$$\Psi = -h_1 - U_1 - \Omega_0 A_\phi + 2r^2\Omega_0^2 h_0 - \frac{3}{2}h_0^2 - 4h_0 U_0 - 2U_0^2 - \int dr r^3(\Omega_0)^4 + F_1(r) \quad (2.45)$$

oraz wykorzystując związek $\partial_z \Omega_0 = 0$ można przepisać równania (2.44) w formie

$$\partial_z \Psi = 0, \quad (2.46a)$$

$$\partial_r \Psi + 2r\Omega_0\Omega_1 + A_\phi \partial_r \Omega_0 - 2r^2 \partial_r \Omega_0^2 h_0 = 0. \quad (2.46b)$$

Należy zwrócić uwagę, że zachodzi tutaj swoboda wyboru funkcji $F_1(r)$. W prezentowanym podejściu stosuje się wybór $F_1(r) = 0$. Wybór taki prowadzi do równań zgodnych z opracowaniem [14]. Odkrycie, że funkcja ta jest dowolna miało miejsca po ukazaniu się tekstu [13] i zostało opisane w [41]

W cylindrycznym układzie współrzędnych, jedyna niezerowa składowa potencjału wektorowego $\mathbf{A}$ jest rozwiązaniem równania

$$\Delta A_\phi - 2 \frac{\partial_r A_\phi}{r} = -16\pi G r^2 \varrho_0 \Omega_0. \quad (2.47)$$

2.2. Wyniki analityczne – warunek całkowalności

Różniczkując pierwsze z równań (2.42) po zmiennej radialnej r oraz drugie po zmiennej wertykalnej z , i odejmując stronami otrzymuje się $\partial_z \Omega_0 = 0$. Jest to warunek całkowalności newtonowskiego układu równań hydrodynamiki. Zawiera on informację dotyczącą pola prędkości, mówiącą że wartość prędkości kontowej Ω_0 jest funkcją wyłącznie odległości od osi obrotu r . Żądanie stabilności wymaga dodatkowych założeń związanych z właściwym momentem pędu, zarówno w hydrodynamice newtonowskiej jak i relatywistycznej [36, 37, 16].

Analogiczny warunek całkowalności można otrzymać dla post-newtonowskich równań wychodząc z układu (2.46) i różniczkując pierwsze równanie po zmiennej radialnej r , drugie po zmiennej wertykalnej z , następnie odejmując stronami, co prowadzi do

$$2r\Omega_0\partial_z\Omega_1 + (\partial_r\Omega_0)(\partial_zA_\phi) - 2r^2\partial_r\Omega_0^2\partial_zh_0 = 0. \quad (2.48)$$

Stąd można znaleźć wyrażenie na poprawkę do prędkości kątowej

$$\Omega_1 = -\frac{A_\phi}{2r\Omega_0}\partial_r\Omega_0 + \frac{rh_0}{\Omega_0}\partial_r\Omega_0^2 + F_2(r). \quad (2.49)$$

A zatem że post-newtonowskim równaniom (2.46) można nadać formę algebraiczną i zapisać

$$\Psi(r, z) = \text{const} \quad (2.50)$$

pod warunkiem, że

$$\Omega_1 = -\frac{A_\phi}{2r\Omega_0}\partial_r\Omega_0 + 2rh_0\partial_r\Omega_0 + F_2(r). \quad (2.51)$$

Uwzględnivszy prawo rotacji (1.1) powyższy wzór przyjmuje algebraiczną formę

$$\Omega_1 = +\frac{3A_\phi}{4r^2} - 3\Omega_0h_0 + F_2(r). \quad (2.52)$$

Ostatni człon w powyższym wyrażeniu zależy jest od wyboru funkcji $F_1(r)$ w równaniu (2.45). W rozdziale niniejszym, zgodnie z rozumowaniem przeprowadzonym w [13] kładzie się warunek $F_2(r) = 0$. W następnym rozdziale przedstawiona zostanie analiza szerszej klasy modeli z $F_2(r) \neq 0$.

Oba pozostałe człony zależą od przyjętego prawa rotacji, a dokładnie od newtonowskiej prędkości kątowej. Pierwszy z nich związany jest ponadto z funkcją metryczną A_ϕ i jest interpretowany jako wleczenie układu współrzędnych. W taki właśnie sposób, ten relatywistyczny efekt manifestuje się w przybliżeniu post-newtonowskim. Mamy tutaj do czynienia z dodatnim sprzężeniem zwrotnym dla efektu wleczenia układu współrzędnych i oraz prędkości kontowej. Drugi ze składników zależy również od entalpii właściwej, a więc od rozkładu materii dyskowej. Funkcje A_ϕ i Ω_1 zmieniają znak dla $\Omega_0 \rightarrow -\Omega_0$, stąd rozważa się jedynie przypadek $\Omega_0 \geq 0$.

Pierwsza składowa sumy znajdującej się we wzorze (2.51) na post-newtonowską poprawkę do prędkości kątowej, w związku z obecnością funkcji metrycznej nazywać się będzie *częścią geometryczną*

$$\Omega_{1,\text{geo}} = -\frac{A_\phi}{2r\Omega_0}\partial_r\Omega_0. \quad (2.53)$$

Składnik ten jest wszędzie nieujemny i przyczynia się do przyspieszenia rotacji. By się o tym przekonać niezbędna jest wiedza na temat znaku A_ϕ . W pracy [13] udowodniono lemat mówiący o tym, że wartość tego pola w tak postawionym modelu jest zawsze nieujemna, co w połączeniu z ujemną pochodną $\partial_r\Omega_0$ malejącej funkcji $\Omega_0(r)$, oraz znakiem minus przed całym wyrażeniem daje wielkość nieujemną, $\Omega_{1,\text{geo}} \geq 0$.

Drugi składnik nazywać się będzie *częścią dynamiczną* lub *antywleczeniową*

$$\Omega_{1,\text{dyn}} = 2rh_0\partial_r\Omega_0. \quad (2.54)$$

Z analizowanego już znaku pochodnej $\partial_r\Omega_0$ oraz nieujemności entalpii h_0 wynika, że powyższe wyrażenie jest wszędzie niedodatnie, $\Omega_{1,\text{dyn}} \leq 0$. Oznacza to, że jej wkład powoduje zwiększenie okresu rotacji.

Okazuje się więc, że jeden z efektów przyspiesza, drugi opóźnia rotację względem tej z newtonowskiego modelu. Z jednej strony powoduje to zmniejszenie sumarycznego efektu, w związku z czym poprawka jest niewielka, z drugiej jednak prowadzi do koncepcyjnie ciekawych wyników. Okazuje się bowiem, że można dobrać takie parametry modelu, dla których efekt geometryczny będzie wyraźnie dominował, jak również można stworzyć konfigurację taką, że otrzymany efekt będzie dokładnie odwrotny. Najbardziej interesującym jednak przypadkiem jest ten, w którym oba efekty są porównywalne, wtedy to, za sprawą post-newtonowskich poprawek w pewnych częściach dysku można zaobserwować rotację wolniejszą, w innych szybszą niż miałyby to miejsce w podejściu newtonowskim.

Można wyróżnić dwa szczególne rodzaje rotacji:

1. Rotacja sztywna. W tym przypadku poprawka Ω_1 jest proporcjonalna do pochodnej z prędkości kątowej względem zmiennej radialnej, co powoduje tożsamościowe znikanie całego wyrażenia. Można przekonać się, że przypadek sztywnej rotacji wyróżnia się spośród pozostałych tym, że minimalizuje całkowitą energię układu na jednostkę liczby barionowej, oraz całkowitą energię układu na jednostkę momentu pędu [40]. Powyższa analiza pokazuje, że zależność ta jest dodatkowo wyróżniona, ponieważ w przypadku sztywnej rotacji, prędkość kątowa nie ulega zmianie przy rozszerzeniu rozumowania z modelu 0PN na model 1PN.
2. Rotacja pyłu. W przypadku pyłu znika część dynamiczna poprawki do prędkości kątowej. Jest to konsekwencją samej natury pyłu dla którego $p = 0$, co jest równoznaczne z zerowaniem się entalpii właściwej. W rezultacie na pył wpływ ma jedynie efekt geometrycznego wleczenia.

Zachowanie się płynu politropowego i pyłu jest skrajnie różne w podejściach newtonowskim i post-newtonowskim. W modelu 0PN prędkość kątowa jest funkcją jedynie odległości od osi obrotu. Jest to słuszne nawet w przypadku bardzo ciężkich dysków, gdzie każdy jego element równoodległy od osi z posiada taką samą prędkość. Uwzględnienie post-newtonowskich poprawek prowadzi do zupełnie innego obrazu. Prędkość kątowa nie jest już dłużej funkcją jednej zmiennej, ale zależy zarówno od odległości od osi obrotu jak i od odległości od równikowej płaszczyzny symetrii. Co więcej, nie tylko wartość poprawki, ale i znak są zdeterminowane przez parametry danej konfiguracji.

2.3. Konstrukcja post-newtonowskich modeli numerycznych, skalowanie

Równania (2.34), (2.42), (2.43) i (2.47) są niezmiennicze względem następującego skalowania [13]

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \lambda \mathbf{x}, & M'_c &= M_c, & \varrho'_0 &= \frac{\varrho_0}{\lambda^3}, & h'_0 &= \frac{h_0}{\lambda}, & \Omega'_0 &= \frac{\Omega_0}{\lambda^{3/2}}, & U'_0 &= \frac{U_0}{\lambda}, \\ A'_\phi &= \frac{A_\phi}{\sqrt{\lambda}}, & \varrho'_1 &= \frac{\varrho_1}{\lambda^4}, & h'_1 &= \frac{h_1}{\lambda^2}, & \Omega'_1 &= \frac{\Omega_1}{\lambda^{5/2}}, & U'_1 &= \frac{U_1}{\lambda^2}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Masa dysku otrzymana w modelu newtonowskim oraz suma mas $M_c + M_d$ są niezmiennikami względem takiego skalowania. Poprawka do masy wyliczona w modelu 1PN skaluje się jak $M'_{1PN} = M_{1PN}/\lambda$, dla ciśnienia natomiast zachodzi $p'_0 = p_0/\lambda^4$. Przy przyjętym równaniu stanu $p = K \varrho^\gamma$ skalowanie powoduje jego zmianę w związku z wpływem na stałą K , która skalować się będzie $K' = K \lambda^{3\gamma-4}$. Dla prawa rotacji (1.1) stała ω_0 nie ulega zmianie. W praktyce oznacza to, że przy zachowaniu relacji pomiędzy masami, zmieniając rozmiary liniowe otrzymuje się różne rozwiązania i fizycznie różne konfiguracje.

Ze względu na konieczność poruszania się w granicach stosowalności przybliżenia 1PN spełnione muszą być następujące warunki:

1. Poprawka do potencjału grawitacyjnego musi pozostawać znacznie mniejsza niż jej newtonowski odpowiednik: $1 \gg |U_0|/c^2 \gg |U_1|/c^4$. Problem ten dyskutowany jest w dalszej części pracy w oparciu o stosowne wykresy wspomnianych potencjałów.
2. Najbardziej wewnętrzna część dysku musi znajdować się w odpowiednio dużej odległości od *horyzontu Schwarzschilda* wyznaczonego przez masę punktową, $2GM_c/c^2 \ll r_{\text{in}}$. W tym miejscu należy zauważyć, że na promień Schwarzschilda wpływ ma również obecność materii dyskowej. Przy spełnieniu wymienionego wyżej warunku uwzględnia się ten fakt poprzez dodatkowe oszacowanie wpływu materii dysku na wzrost promienia Schwarzschilda.
3. Lokalna prędkość dźwięku c_s musi być znacznie mniejsza od prędkości światła, $c \gg c_s$.

W związku z powyższymi warunkami, liczba potencjalnych konfiguracji jakie można przeanalizować i na jakich przeanalizowanie pozwala swoboda doboru parametru λ jest mocno ograniczona.

Za parametr określający skalę wpływu pierwszej poprawki na oryginalną wartość prędkości kątowej przyjmuje się ich iloraz $\Xi := (\Omega_1/c^2)/\Omega_0$. W takiej sytuacji, w związku ze skalowaniem (2.55) mamy dla różnych konfiguracji relację

$$\frac{\Omega'_1}{c^2 \Omega'_0} = \frac{1}{\lambda} \frac{\Omega_1}{c^2 \Omega_0}, \quad \text{czyli} \quad \Xi' = \frac{\Xi}{\lambda}. \quad (2.56)$$

2.4. Opis procedury numerycznej

Struktura dysku otrzymywana jest na podstawie równania stanu i prawa rotacji oraz pięciu równań

$$h_0 = \int dr \Omega_0^2 r - U_0 + C_0, \quad (2.57a)$$

$$\Delta U_0 = 4\pi G \left(M_c \delta^{(3)}(\mathbf{x}) + \varrho_0 \right), \quad (2.57b)$$

$$\Delta A_\phi - \frac{2\partial_r A_\phi}{r} = -16\pi G r^2 \varrho_0 \Omega_0, \quad (2.57c)$$

$$\Delta U_1 = 4\pi G \left(M_c U_0^D(\mathbf{0}) \delta^{(3)}(\mathbf{x}) + \varrho_1 + 2p_0 + \varrho_0 \left(h_0 - 2U_0 + 2\Omega_0^2 r^2 \right) \right), \quad (2.57d)$$

$$h_1 = -U_1 - A_\phi \Omega_0 + 2h_0 \Omega_0^2 r^2 - \int dr r^3 (\Omega_0)^4 - \frac{3}{2} h_0 - 4h_0 U_0 - 2U_0^2 - C_1 \quad (2.57e)$$

na pięć pól $\varrho_0(\mathbf{x})$, $U_0(\mathbf{x})$, $A_\phi(\mathbf{x})$, $\varrho_1(\mathbf{x})$, $U_1(\mathbf{x})$, które w sposób kompletny opisują daną konfigurację.

Wyrażenie $4\pi G M_c U_0(\mathbf{0}) \delta(\mathbf{x})$ po prawej stronie równania na poprawkę do potencjału prowadzi do $-G M_c U_0^D(\mathbf{0})/|\mathbf{x}|$ w rozwiązaniu U_1 . Po wykluczeniu z obliczeń numerycznych osobliwego punktu $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ wyrażenie $U_0^D(\mathbf{0})$ można wyrazić całką

$$U_0^D(\mathbf{0}) = -G \int d^3x \frac{\varrho_0}{\mathbf{x}}.$$

Kolejność w jakiej równania zostały wypisane nie jest przypadkowa i jest związana z procedurą numerycznego ich rozwiązywania. Równania (2.57a) i (2.57b) stanowią część newtonowską, a proces rozwiązywania tego układu został opisany szczegółowo w podrozdziale 1.4.

Następne w kolejności jest równanie (2.57c) na potencjał rotacyjny. Należy zwrócić uwagę, że jego źródło jest wyrażone wyłącznie przez newtonowskie, a więc obliczone wcześniej wielkości. Oznacza to, że może zostać ono rozwiązane bez stosowania procedury iteracyjnej. Opis metody rozwiązywania tego typu równań zawiera dodatek 3.3.

Przy znajomości pól $\varrho_0(\mathbf{x})$, $U_0(\mathbf{x})$, $A_\phi(\mathbf{x})$ można użyć schematu, który zastosowany został do rozwiązywania układu równań z części newtonowskiej. Procedura wygląda podobnie i wykonuje się ją na tej samej siatce numerycznej, przy tych samych parametrach związanych z precyzją (rozdzielczość, liczba wielomianów Legendre’a, parametr tolerancji), przy tych samych parametrach modelu (równanie stanu, $\tilde{r}_{\text{in}}$, $\tilde{M}_c$, $\tilde{\varrho}_{\text{max}}$). Różnica polega na tym, że źródło w równaniu Poissona na poprawkę do potencjału grawitacyjnego składa się z wielu wyrażeń o charakterze newtonowskim oraz z post-newtonowskiej poprawki do gęstości. Z tego właśnie powodu pierwszym krokiem iteracji jest zapostulowanie $\varrho_1 = 0$ i obliczenie potencjału U_1 ze źródła złożonego wyłącznie z newtonowskich wielkości. Nowe pola $A_\phi(\mathbf{x})$, $\varrho_1(\mathbf{x})$, $U_1(\mathbf{x})$ wyliczane są z równań, w których wszystkie newtonowskie wielkości zapisane są w zmiennych bezwymiarowych zgodnie z podrozdziałem 1.3. W przypadku post-newtonowskich poprawek oryginalne wielkości można odzyskać korzystając z opisanego tam skalowania oraz analizy wymiarowej. W przypadku potencjału A_ϕ , nie posiadającego newtonowskiego odpowiednika należy posłużyć się wprowadzoną wielkością u i tak otrzymuje się $\tilde{A}_\phi = A_\phi/(u^{3/2} r_{\text{out}})$. Wielkości newtonowskie zostały obliczone już wcześniej i na tym etapie traktowane są jako zadane. Schemat wygląda następująco. Oblicza się:

1. Potencjał $\tilde{U}_1$ z równania (2.57d)

$$\tilde{U}_1 = \frac{\tilde{M}_c \int_{\mathbb{R}} d^3\tilde{x} \frac{\rho(\tilde{\mathbf{x}})}{\tilde{\mathbf{x}}}}{\tilde{\mathbf{x}}} + \tilde{U}_1^d, \quad (2.58)$$

gdzie potencjał $\tilde{U}_1^d$ związany jest z rozkładem materii dyskowej i dla $\tilde{\varrho}_0 = 0$ jest rozwiązaniem równania Poissona

$$\tilde{\Delta}\tilde{U}_1^d = 4\pi \left(2\tilde{K}\tilde{\varrho}_0^\gamma + \tilde{\varrho}_0 \left(\tilde{h}_0 - 2\tilde{U}_0 + 2\tilde{\omega}_0^2\tilde{r}^{-1} \right) \right). \quad (2.59)$$

2. Stałą C_1 występującą w post-newtonowskim równaniu Bernoulliego na brzegu dysku w $\tilde{r} = \tilde{r}_{\text{out}} = 1$, gdzie $\tilde{h}_0(\tilde{r}_{\text{out}}) = \tilde{h}_1(\tilde{r}_{\text{out}}) = 0$,

$$C_1 = -\tilde{U}_1(\tilde{r}_{\text{out}}) - \tilde{A}_\phi(\tilde{r}_{\text{out}})\tilde{\omega}_0\tilde{r}_{\text{out}}^{-3/2} + \frac{1}{2}\tilde{\omega}_0^4\tilde{r}_{\text{out}}^{-2} - 2\tilde{U}_0(\tilde{r}_{\text{out}})^2. \quad (2.60)$$

3. Poprawkę do entalpii właściwej $\tilde{h}_1$ z równania (2.57e),

$$\tilde{h}_1 = -\tilde{U}_1 - \tilde{A}_\phi\tilde{\omega}_0\tilde{r}^{-3/2} + 2\tilde{h}_0\tilde{\omega}_0^2\tilde{r}^{-1} + \frac{1}{2}\tilde{\omega}_0^4\tilde{r}^{-2} - \frac{3}{2}\tilde{h}_0 - 4\tilde{h}_0\tilde{U}_0 - 2\tilde{U}_0^2 - C_1. \quad (2.61)$$

Poprawka do gęstości $\tilde{\varrho}$ zgodnie z (2.28) dana jest jako

$$\tilde{\varrho}_1 = \frac{\tilde{h}_1}{\tilde{K}\gamma} \tilde{\varrho}_0^{2-\gamma}. \quad (2.62)$$

4. Potencjał $\tilde{U}_1$ uwzględniający właśnie wyliczony rozkład $\tilde{\varrho}_1$ dany jest wzorem (2.58) przy czym równanie (2.59) posiada już źródło zawierające właśnie wyliczoną poprawkę do gęstości, należy więc ponownie zapisać

$$\tilde{U}_1 = \frac{\tilde{M}_c \int_{\mathbb{R}} d^3\tilde{x} \frac{\rho(\tilde{\mathbf{x}})}{|\tilde{\mathbf{x}}|}}{|\tilde{\mathbf{x}}|} + \tilde{U}_1^d, \quad (2.63)$$

gdzie potencjał $\tilde{U}_1^d$ związany jest z rozkładem materii dyskowej i dla pełnego źródła zawierającego post-newtonowskie poprawki jest rozwiązaniem równania Poissona

$$\tilde{\Delta}\tilde{U}_1^d = 4\pi \left(\tilde{\varrho}_1 + 2\tilde{K}\tilde{\varrho}_0^\gamma + \tilde{\varrho}_0 \left(\tilde{h}_0 - 2\tilde{U}_0 + 2\tilde{\omega}_0^2\tilde{r}^{-1} \right) \right). \quad (2.64)$$

Potencjał ten zostanie użyty do obliczenia nowego rozkładu $\tilde{\varrho}_1$. Widać tutaj ścisłą analogię z procedurą przeprowadzaną w rozdziale pierwszym. W opisie tego schematu zostały użyte bezwymiarowe zmienne wprowadzone w podrozdziale 1.3.

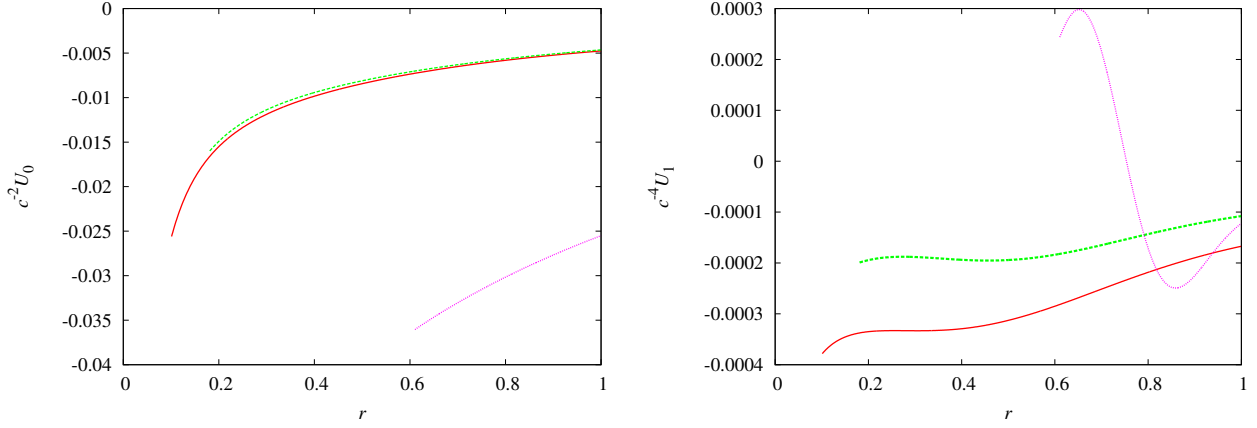
Podobnie jak wcześniej, brzeg dysku zdeterminowany jest przez zadanie parametrów geometrycznych na równiku, natomiast w otrzymanym profilu stosuje się obcięcia zgodnie z regułą

$$(\tilde{h}_0 + \tilde{h}_1/c^2 \leq 0) \vee (\tilde{\varrho}_0 + \tilde{\varrho}_1/c^2 \leq 0) \Rightarrow \tilde{h}_1 = \tilde{\varrho}_1 = 0. \quad (2.65)$$

Poprawki $\tilde{h}_1$ oraz $\tilde{\varrho}_1$ mogą być ujemne. Warunek nieujemności jest nakładany jedynie na całkowitą entalpię oraz całkowitą gęstość, czyli na sumy części newtonowskiej i post-newtonowskiej poprawki. Wszędzie tam, gdzie chociaż jedna z tych wielkości staje się ujemna obie poprawki przyjmuje się równe zero.

2.5. Wyniki

Przeanalizowane zostały modele politropowych dysków z $\gamma = 5/3$ o porównywalnych masach, $M_c \sim M_d$. Parametry dysków zostały dobrane tak, by mieć pewność, że otrzymana konfiguracja mieści się w granicach stosowalności post-newtonowskiego przybliżenia.



Rysunek 2.1. Zależności potencjałów U_0/c^2 (lewy wykres) oraz U_1/c^4 (prawy wykres) od odległości od osi obrotu w płaszczyźnie równikowej. Zielona krzywa przedstawia potencjał dla przypadku przedstawionego na wykresie 2.2, czerwona na wykresie 2.3, fioletowa na wykresie 2.4.

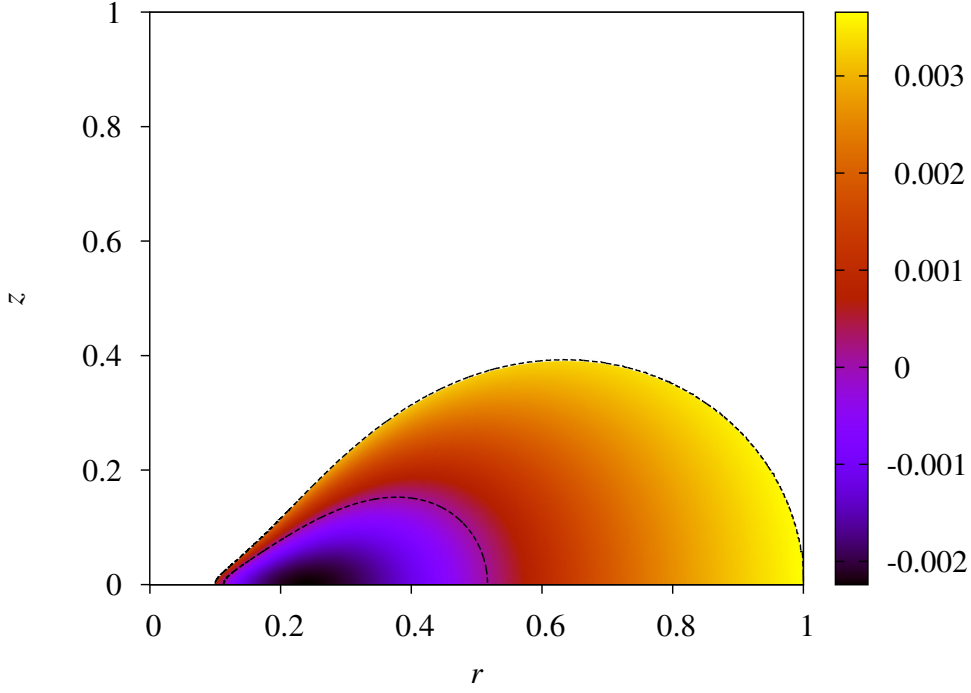
Maksymalna prędkość liniowa $(1 - U)r\Omega$ stanowi tutaj co najwyżej 10% prędkości światła. Rysunki 2.1 i 2.2 przedstawiają wykresy znormalizowanych potencjałów newtonowskiego U_0/c^2 oraz post-newtonowskiego U_1/c^4 , z których jasno widać, że pole 1PN jest o rzędy wielkości słabsze od pola rzędu zerowego.

Paleta kolorów na rysunkach 2.2-2.4 przedstawia stosunek $\Xi = \Omega_1/(c^2\Omega_0)$ w przekroju dysku. Jest to pewnego rodzaju miara, która informuje o tym jaki wpływ na dynamikę układu ma post-newtonowska poprawka w stosunku do prędkości newtonowskiej. W przykładach tych $R_S := 2GM_c/c^2$ jest promieniem Schwarzschilda zdeterminowanym przez wartość masy punktowej.

Na ruch materii dyskowej w modelu 1PN mają tutaj wpływ dwa efekty. Pierwszy, geometryczny jest przejawem znanego relatywistycznego zjawiska jakim jest wleczenie układu współrzędnych. Drugi ma charakter dynamiczny i zależy od rozkładu materii dyskowej. Rysunek 2.2 przedstawia iloraz post-newtonowskiej poprawki do prędkości newtonowskiej. Zaznaczone są na nim dwie izoliny wskazujące miejsca zerowania się stosunku Ξ . Z palety barw można odczytać, że wewnątrz zaznaczonej izoliny stosunek ten jest mniejszy od zera, a więc dominuje efekt dynamiczny (antywleczeniowy), stanowiący do 3‰ wartości newtonowskiej. W pozostałej części dysku, większe znaczenie ma dodatni efekt geometryczny, którego wartość sięga 4‰ wartości newtonowskiej. Należy zwrócić uwagę, że wielkość $(1 - U/c^2)r + \mathcal{O}(c^{-4})$ w ramach przybliżenia 1PN jest równa promieniowi obwodowemu, czyli odległości obwodowej od osi z .

Metodami numerycznymi można przeanalizować wiele innych, jakościowo podobnych konfiguracji. Przesuwając wewnętrzny promień dysku od centrum układu obserwuje się osłabienie efektu dynamicznego na rzecz efektu geometrycznego. Dla r_{in} stanowiącego ok 18% r_{out} dla całego obszaru dysku obowiązuje relacja $\Omega_{1,\text{dyn}} \leq \Omega_{1,\text{geo}}$. Próg 18% nie jest w żaden sposób wyróżniony i może być inny, przy innym doborze pozostałych parametrów układu. Należy zwrócić jednak uwagę na ogólną zależność $\Omega_{1,\text{dyn}}$ i $\Omega_{1,\text{geo}}$ oraz ich wzajemnych relacji od promienia wewnętrznego. Efekt zmniejszania obszaru wpływu jednego ze składników na rzecz drugiego prezentuje rysunek 2.3. Metodami empirycznymi można przekonać się, że w analizowanych układach efekt geometryczny zaczyna dominować nad dynamicznym gdy względna grubość dysku spełniała relację $(r_{\text{out}} - r_{\text{in}})/r_{\text{out}} > 0.2$.

Pośród przebadanych konfiguracji znalazły się takie, w których stosunek Ξ osiągał wartość kilku procent. Rysunek 2.4 przedstawia mocno relatywistyczny układ w którym promień wewnętrzny jest stosunkowo blisko horyzontu Schwarzschilda, dokładnie w $19.5R_S$. W tym



Rysunek 2.2. Stosunek Ξ w przekroju dysku. Oś rzędnych przedstawia wysokość dysku, natomiast oś odciętych odległość od centrum układu w jednostkach, w których 1 odpowiada $250R_S$. Promień wewnętrzny zlokalizowany jest w $r_{\text{in}} = 25R_S$, promień zewnętrzny w $r_{\text{out}} = 250R_S$. Newtonowska masa dysku jest równa $M_D = 1.47 \times M_c$, natomiast $\omega_0 = 0.85\sqrt{2GM_c}$. Zgodnie z paletą barw, obszar ciemnoniebieski zdominowany jest przez efekt dynamiczny i oddzielony jest przerywaną izolinią $\Omega_1 = \Xi = 0$ od zewnętrznego obszaru, zdominowanego przez efekt geometryczny.

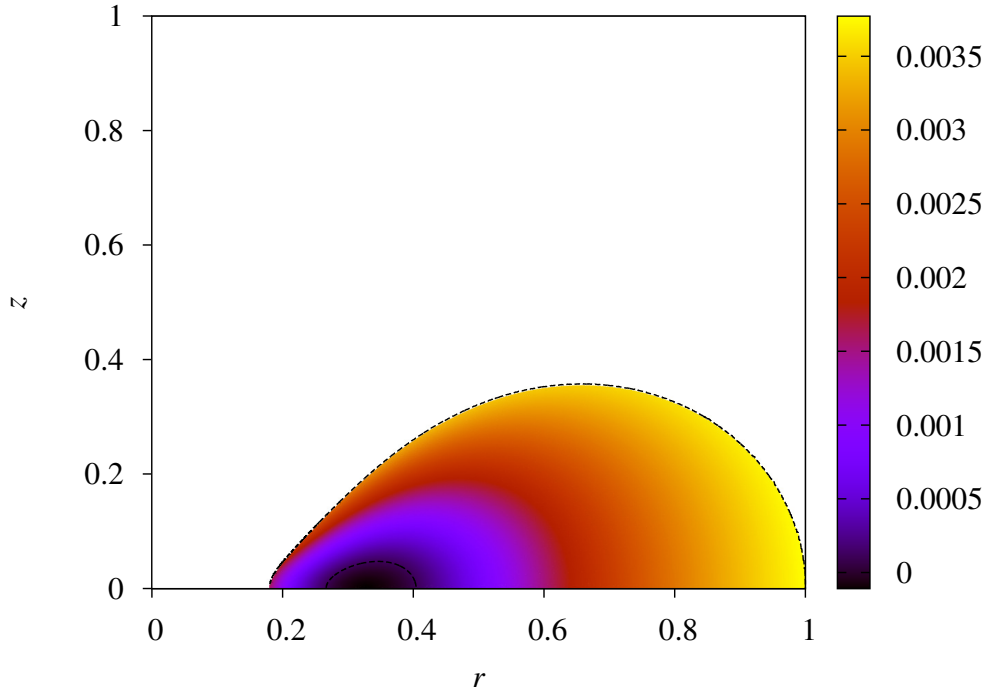
wypadku efekt dynamiczny jest marginalny, niemalże cała poprawka związana jest z częścią geometryczną.

W rozdziałach 1.3 i 2.3 przedyskutowana została kwestia zmiany rozmiarów geometrycznych i towarzyszących jej zmian pozostałych parametrów. W szczególności zwraca się tam uwagę na niezmienniczość masy centralnej układu względem skalowania rozmiarów geometrycznych, podczas gdy wartość stosunku Ξ skaluje się jak $\Xi' = \Xi/\lambda'$. Oznacza to, że z łatwością można odtworzyć wiele różnych konfiguracji cechujących się jednakową masą centralną, przy różnych rozmiarach geometrycznych. Tak otrzymane układy różnić się będą rozkładem stosunku Ξ . W ten sposób można otrzymać przypadki o bardzo dużym wpływie pierwszej post-newtonowskiej poprawki, z drugiej strony pozostaje kwestia stosowalności przybliżenia 1PN. Kolejnym krokiem w stronę poznania natury keplerowskich, samograwitujących dysków jest opracowanie ogólnorelatywistycznego modelu, niezależnego od rozwinięć post-newtonowskich.

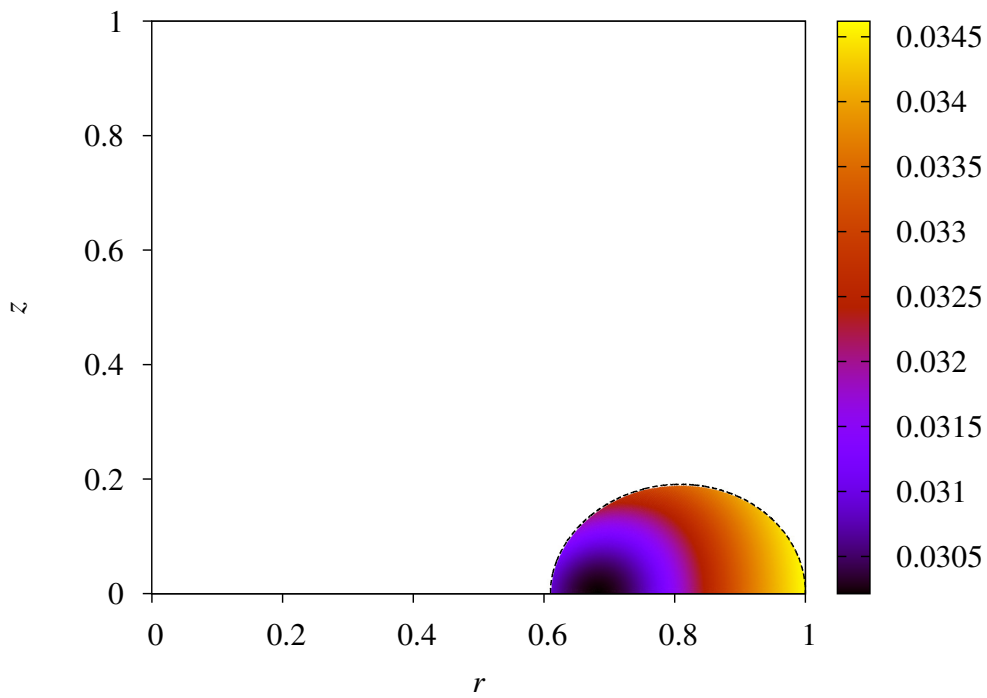
2.6. Wirialne testy poprawności rachunków numerycznych w modelu 1PN

Procedura testowania tego typu równań została opisana w pracy [15]. Dla potrzeb testów wirialnych wygodnie jest zapisać równania na potencjał rotacyjny (2.57c) oraz na poprawkę do potencjału grawitacyjnego (2.57d) w nieco innej formie. Równanie (2.57c) w kartezjańskim układzie współrzędnych przyjmuje postać

$$\Delta A^i = -16\pi G \varrho_0 v_0^i,$$



Rysunek 2.3. Stosunek Ξ w przekroju dysku. Oś rzędnych przedstawia wysokość dysku, natomiast oś odciętych odległość od centrum układu w jednostkach, w których 1 odpowiada $450R_S$. Promień wewnętrzny zlokalizowany jest w $r_{\text{in}} = 81R_S$, promień zewnętrzny w $r_{\text{out}} = 450R_S$. Newtonowska masa dysku jest równa $M_D = 1.4 \times M_c$, natomiast $\omega_0 = 1.188\sqrt{2GM_c}$. Zgodnie z paletą barw, obszar ciemnoniebieski zdominowany jest przez efekt dynamiczny i oddzielony jest przerywaną izolacją $\Omega_1 = \Xi = 0$ od zewnętrznego obszaru, zdominowanego przez efekt geometryczny.



Rysunek 2.4. Stosunek Ξ w przekroju dysku. Oś rzędnych przedstawia wysokość dysku, natomiast oś odciętych odległość od centrum układu w jednostkach, w których 1 odpowiada $50R_S$. Promień wewnętrzny zlokalizowany jest w $r_{\text{in}} = 30.5R_S$, promień zewnętrzny w $r_{\text{out}} = 50R_S$. Newtonowska masa dysku jest równa $M_D = 1.8 \times M_c$, natomiast $\omega_0 = 1.31\sqrt{2GM_c}$. Stosunek Ξ jest największy na brzegach dysku i osiąga wartość do 3.46%.

natomiast rozwiązanie równania (2.57d) można zapisać w postaci sumy $U_1 = U_1^d + U_1^p$, gdzie

$$\Delta U_1^d = 4\pi G \left(\varrho_1 + 2p_0 + \varrho_0 \left(h_0 - 2U_0 + 2r^2 \Omega_0^2 \right) \right), \quad (2.66)$$

$$\Delta U_1^d = 4\pi G M_c U_0^d(0) \delta(\mathbf{x}), \quad (2.67)$$

przy czym rozwiązaniem U_1^d jest

$$U_1^d = -\frac{GM_c U_0^d(\mathbf{0})}{|\mathbf{x}|}. \quad (2.68)$$

Rozważmy wektor

$$a^i = \left(x^l \partial_l A_k + \frac{1}{2} A_k \right) \partial^i A^k - \frac{1}{2} x^i \partial_l A^k \partial^l A_k. \quad (2.69)$$

Jego dywergencja ma postać

$$\partial_i a^i = \left(x^l \partial_l A_k + \frac{1}{2} A_k \right) \Delta A^k = -16\pi G \left(x^l \partial_l A_k + \frac{1}{2} A_k \right) \varrho_0 v_0^k. \quad (2.70)$$

Dla skończonego dysku (o zwartym nośniku ϱ_0) A_k dąży do zera odpowiednio szybko i dla powyższej definicji wektora a^i widać, że

$$|\mathbf{x}|^2 a^i \rightarrow 0, \quad \text{gdy} \quad |\mathbf{x}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty. \quad (2.71)$$

Całkując zatem równanie (2.70) po całej przestrzeni $\mathbb{R}^3$ i korzystając z twierdzenia Gaussa otrzymuje się

$$0 = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left(x^l \partial_l A_k + \frac{1}{2} A_k \right) \varrho_0 v_0^k. \quad (2.72)$$

Całkując dalej przez części można wyeliminować z równań człon z pochodną $\partial_l A_k$, co prowadzi do

$$0 = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left(-\frac{5}{2} \varrho_0 A_k v_0^k - x^l \partial_l \left(\varrho_0 v_0^k \right) A_k \right), \quad (2.73)$$

gdzie różniczkowane są wielkości wyłącznie newtonowskie. Relację powyższą można przedstawić we współrzędnych cylindrycznych, dla których zachodzi $A_k v_0^k = A_\phi \Omega_0$, w związku z czym otrzymuje się

$$x^l \partial_l \left(\varrho_0 v_0^k \right) A_k = x^l \nabla_l \left(\varrho_0 v_0^k \right) A_k = \varrho_0 A_\phi \Omega_0 + x^l \partial_l \left(\varrho_0 \Omega_0 \right) A_\phi \quad (2.74)$$

i w końcu

$$0 = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left(-\frac{7}{2} \varrho_0 A_\phi \Omega_0 - x^l \partial_l \left(\varrho_0 \Omega_0 \right) A_\phi \right). \quad (2.75)$$

Kolejną relację wirialną można otrzymać wychodząc z równania (2.66) i postępując w sposób analogiczny. Niech będzie dany wektor

$$b^i = \left(x^l \partial_l U_1^d + \frac{1}{2} U_1^d \right) \partial^i U_1^d - \frac{1}{2} x^i \partial_l U_1^d \partial^l U_1^d \quad (2.76)$$

i jego dywergencja

$$\partial_i b^i = \left(x^l \partial_l U_1^d + \frac{1}{2} U_1^d \right) \Delta U_1^d. \quad (2.77)$$

Podobne rachunki prowadzą do związku wirialnego

$$0 = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left(x^l \partial_l U_1^d + \frac{1}{2} U_1^d \right) \left(\varrho_1 + 2p_0 + \varrho_0 \left(h_0 - 2U_0 + 2r^2 \Omega_0^2 \right) \right). \quad (2.78)$$

Tabela 2.1. Zależność typowych wyników od rozdzielczości, liczby użytych wielomianów Legendre’a L i współczynnika tolerancji ϱ_{tol} . Wyniki otrzymane zostały dla wykładnika politropy $\gamma = 5/3$, masy dysku równej $M_d = 0.327M_c$ oraz promieni wewnętrznego i zewnętrznego $r_{\text{in}} = 50R_S$ i $r_{\text{out}} = 500R_S$ odpowiednio.

Rozdzielczość	L	ϱ_{tol}	ϵ	ϵ'	ϵ''
100×100	100	10^{-6}	2.53×10^{-5}	2.29×10^{-4}	3.51×10^{-4}
200×200	100	10^{-6}	6.36×10^{-6}	5.87×10^{-5}	8.87×10^{-5}
400×400	100	10^{-6}	1.56×10^{-6}	1.93×10^{-5}	2.29×10^{-5}
800×800	100	10^{-6}	3.66×10^{-7}	3.65×10^{-6}	4.62×10^{-6}
1200×1200	100	10^{-6}	1.44×10^{-7}	1.56×10^{-6}	2.49×10^{-6}
1600×1600	100	10^{-6}	6.66×10^{-8}	5.43×10^{-7}	1.39×10^{-6}
400×400	50	10^{-6}	1.56×10^{-6}	1.93×10^{-5}	2.27×10^{-5}
400×400	75	10^{-6}	1.56×10^{-6}	1.93×10^{-5}	2.29×10^{-5}
400×400	100	10^{-6}	1.56×10^{-6}	1.93×10^{-5}	2.29×10^{-5}
400×400	125	10^{-6}	1.56×10^{-6}	1.93×10^{-5}	2.30×10^{-5}
400×400	150	10^{-6}	1.56×10^{-6}	1.93×10^{-5}	2.30×10^{-5}
400×400	100	10^{-5}	1.52×10^{-6}	1.94×10^{-5}	2.29×10^{-5}
400×400	100	10^{-6}	1.56×10^{-6}	1.93×10^{-5}	2.29×10^{-5}
400×400	100	10^{-7}	1.59×10^{-6}	1.93×10^{-5}	2.29×10^{-5}
400×400	100	10^{-8}	1.59×10^{-6}	1.93×10^{-5}	2.29×10^{-5}

Numerycznie przetestowane zostały wartości wyrażeń $\epsilon' = |(\epsilon'_a + \epsilon'_b)/\epsilon'_a|$ oraz $\epsilon'' = |(\epsilon''_a + \epsilon''_b)/\epsilon''_a|$, gdzie

$$\epsilon'_a = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \frac{7}{2} \varrho_0 A_\phi \Omega_0, \quad (2.79)$$

$$\epsilon'_b = - \int_{\mathbb{R}^3} d^3x x^l \partial_l (\varrho_0 \Omega_0) A_\phi, \quad (2.80)$$

$$\epsilon''_a = - \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \frac{1}{2} U_1^d \left(\varrho_1 + 2p_0 + \varrho_0 (h_0 - 2U_0 + 2r^2 \Omega_0^2) \right), \quad (2.81)$$

$$\epsilon''_b = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x x^l \partial_l U_1^d \left(\varrho_1 + 2p_0 + \varrho_0 (h_0 - 2U_0 + 2r^2 \Omega_0^2) \right). \quad (2.82)$$

Tabela 2.1 przedstawia testy zbieżności dla arbitralnie wybranego modelu o następujących parametrach: wykładnik politropy $\gamma = 5/3$, masa dysku $M_d = 0.327M_c$, wewnętrzny i zewnętrzny promień dysku $r_{\text{in}} = 50R_S$ i $r_{\text{out}} = 500R_S$ odpowiednio. Precyzja obliczeń tak jak poprzednio kontrolowana jest przez trzy parametry: rozdzielczość, liczbę wielomianów Legendre’a L oraz parametr tolerancji ϱ_{tol} .

Z tabeli odczytać można wyraźną zależność dokładności wyników od rozdzielczości siatki numerycznej i brak zależności od pozostałych parametrów. Ze względu na badanie względnie grubych układów, liczba wielomianów użytych do rozwinięcia kąowego gra tutaj drugorzędną rolę. Powyższe wyniki są o rząd wielkości mniej dokładne niż ich analogon przedstawiony w tabeli 1.1, co tłumaczyć można generującym błędy różniczkowaniem numerycznym.

2.7. Post-newtonowskie układy dyskowe – wnioski

Należy podkreślić, że poniższe uwagi dotyczą układów do opisu których przyjęto wartość funkcji $F_1 = 0$ (patrz rozdział 2.1.2). Sytuacja ogólna będzie rozważona w następnym rozdziale. Post-newtonowski model stacjonarnych, samograwitujących, keplerowskich dysków jest

jakościowo różny od obrazu otrzymanego w reżimie newtonowskim. Prędkość rotacji nie jest dłużej funkcją jedynie odległości od osi obrotu, ale poprzez pierwszą poprawkę zależy również od wysokości nad płaszczyzną równikową. Na poprawkę tę składają się dwa efekty. Pierwszy, zawsze nieujemny, tzw. *efekt geometryczny* jest post-newtonowskim przejawem zjawiska wleczenia układu współrzędnych pojawiającego się w czarnodziurowych rozwiązaniach równań Einsteina. Efekt drugi, zawsze niedodatni, tzw. *efekt dynamiczny* związany jest z newtonowskim rozkładem materii dyskowej [13]. Ponadto na oba efekty wpływ ma newtonowska prędkość rotacji, a dokładnie szybkość jej zmian w kierunku radialnym. Różne znaki obu efektów powodują ich wzajemne osłabienie. Prowadzi to z jednej strony do zmniejszenia sumarycznego efektu, z drugiej jednak zostawia miejsce na pewne ciekawe zjawiska polegające na dominowaniu jednego z efektów w zależności od rozważanej konfiguracji. Można również dobrać parametry układu tak, by oba efekty przejawiały się z różną intensywnością w różnych częściach dysku [13].

Przeanalizowanych zostało wiele różnych układów wykazujących wpływ post-newtonowskiej poprawki na poziomie od kilku promili do kilku procent. Koncepcyjnie ciekawymi przykładami okazały się być modele ze sztywną rotacją, w których to uwzględnienie post-newtonowskich poprawek nie ma wpływu na prędkość rotacji, oraz model materii pyłowej, dla których znika poprawka dynamiczna.

Równania na potencjały rotacyjny A_ϕ oraz U_1 zostały przetestowane poprzez odpowiednie relacje wirialne. Wyniki testów pozostają na niższym niż w przypadku równań teorii newtonowskiej (o czym można się przekonać porównując tabele 1.1-1.3 z tabelą 2.1), jednak w zupełności akceptowalnym poziomie.

Rozdział 3

Przybliżenie słabego pola - rozważania ogólne

3.1. Poprawki do prędkości wynikające z OTW

W tym rozdziale dyskutowany będzie wybór funkcji $F_1(r)$ i $F_2(r)$ w równaniach (2.45), (2.51). Mach i Malec [41] przedstawili następujące rozumowanie.

Niech geometria czasoprzestrzeni będzie zadana przez zapisaną we współrzędnych cylindrycznych metrykę:

$$ds^2 = -e^{\frac{2\nu}{c^2}}(dx^0)^2 + r^2 e^{\frac{2\beta}{c^2}} \left(d\phi - \frac{\omega}{c^3}(r, z) dx^0 \right)^2 + e^{\frac{2\alpha}{c^2}} (dr^2 + dz^2), \quad (3.1)$$

gdzie $x^0 = ct$, natomiast $\alpha(r, z)$, $\beta(r, z)$, $\nu(r, z)$, $\omega(r, z)$ będą funkcjami metrycznymi, niezależnymi od współrzędnej azymutalnej ze względu na osiową symetrię. W ogólnorelatywistycznym opisie definiuje się prędkość kątową $\Omega := u^\phi/u^t$, kwadrat prędkości liniowej $\mathbf{v}^2 := v_i v^i = r^2 \left(\Omega - \frac{\omega}{c^2} \right)^2 e^{2(\beta-\nu)/c^2}$ i moment pędu na jednostkę masy $j := u_\phi u^t$. Ten ostatni jest funkcją jedynie prędkości kątowej $j = j(\Omega)$ i pozwala na zapisanie standardowych praw zachowania $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ i $\nabla_\nu(\rho u^\mu) = 0$ w formie [42]

$$\ln \left(1 + \frac{h}{c^2} \right) + \frac{\nu}{c^2} + \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2} \right) + \frac{1}{c^2} \int d\Omega j(\Omega) = C_2. \quad (3.2)$$

Autorzy pracy [41] przedstawiają rodzinę praw rotacji postaci:

$$\frac{\omega_0^{1-\delta} \Omega^\delta}{1 - \frac{\kappa}{c^2} \omega_0^{1-\delta} \Omega^{1+\delta} + \frac{\sigma}{c^2}} = \frac{\mathbf{v}^2}{\left(\Omega - \frac{\omega}{c^2} \right) \left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2} \right)}, \quad (3.3)$$

gdzie ω_0 , $\delta \neq -1$, κ i σ to parametry. Przy tak zdefiniowanym prawie rotacji równanie Bernoulliego przyjmuje postać

$$\left(1 + \frac{h}{c^2} \right) e^{\nu/c^2} \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} \left(1 - \frac{\kappa}{c^2} \omega_0^{1-\delta} \Omega^{1+\delta} + \frac{\sigma}{c^2} \right)^{-\frac{1}{(1+\delta)\kappa}} = C_2. \quad (3.4)$$

Przechodząc w (3.3) do granicy newtonowskiej otrzymuje się

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \Omega = \Omega_0 = \frac{\omega_0}{r^{2/(1-\delta)}}. \quad (3.5)$$

Przypadek $\delta = 0$ odpowiada stałej wartości momentu pędu na jednostkę masy, $\delta = -\infty$ odpowiada sztywnej rotacji, natomiast $\delta = -1/3$ odpowiada rotacji keplerowskiej. Dodatkowo warunek $\omega_0 = \sqrt{GM}$ odpowiada rotacji ściśle keplerowskiej dyskutowanej w początkowych rozdziałach. Należy zwrócić uwagę, że parametr ω_0 może być zupełnie dowolny, $\omega_0 \in \mathbb{R}$, z drugiej strony parametr δ , ze względu na problem stabilności [16] jest ograniczony, $\delta \in \mathbb{R}_- \setminus \{-1\}$.

W rozdziale poprzednim post-newtonowska poprawka otrzymywana była dla założenia $F_1(r) = F_2(r) = 0$. Taki wybór równań hydrodynamiki był dokonany w celu osiągnięcia zgodności z pracą [14]. Okazuje się, że funkcje te można wyznaczyć poprzez założenie, że nieskończenie cienki, pyłowy dysk w geometrii Schwarzschilda ma dokładnie spełniać keplerowskie prawo rotacji oraz równanie Bernoulliego.

Takie sformułowanie problemu pociąga za sobą warunki $\kappa = (1 - 3\delta)/(1 + \delta) + \mathcal{O}(c^{-2})$ oraz $\sigma = 4C + \mathcal{O}(c^{-2})$, gdzie C to wartość hydrodynamicznej energii na jednostkę masy w zerowym rzędzie. Dla prawa rotacji z takimi parametrami post-newtonowskie równanie Bernoulliego (2.57d) oraz równanie na poprawkę do prędkości (2.52) można zapisać z różnymi od zera, stosownymi do tego podejścia funkcjami

$$F_1(r) = -\frac{3}{2}\Omega_0^4 r^4 \quad (3.6)$$

oraz

$$F_2(r) = \partial_r F_1(r)/(2r\Omega_0) = \frac{3}{2}\Omega_0^3 r^2. \quad (3.7)$$

W związku z tym poprawka do entalpii właściwej dana jest wzorem

$$h_1 = -U_1 - \Omega_0 A_\phi + 2r^2(\Omega_0)^2 h_0 - \frac{3}{2}h_0^2 - 4h_0 U_0 - 2U_0^2 - \Omega_0^4 r^4 - c_1, \quad (3.8)$$

$$\Omega_1 = \frac{3A_\phi}{4r^2} - 3\Omega_0 h_0 + \frac{3}{2}\Omega_0^3 r^2. \quad (3.9)$$

Wobec tego, w przybliżeniu 1PN prędkość kątowna wyrażać się będzie

$$\Omega = \Omega_0 + \frac{\Omega_1}{c^2} = \frac{\omega_0}{r^{3/2}} + \frac{1}{c^2} \left(\frac{3A_\phi}{4r^2} - 3\Omega_0 h_0 - \frac{3}{2}\Omega_0^3 r^2 \right). \quad (3.10)$$

Promień cylindryczny r w powyższych wzorach to promień współrzędnościowy. Wiążąc go z promieniem powierzchniowym $\hat{r} = r(1 - U_0/c^2 + \mathcal{O}(c^{-4}))$ można zapisać najbardziej ogólne wyrażenie na poprawkę do prędkości w pierwszym rzędzie post-newtonowskim

$$\Omega = \Omega_0 + \frac{\Omega_1}{c^2} = \frac{\omega_0}{\hat{r}^{3/2}} + \frac{1}{c^2} \left(\frac{3A_\phi}{4r^2} - 3\Omega_0 h_0 - \frac{3}{2}\Omega_0 (\Omega_0^2 r^2 + U_0) \right). \quad (3.11)$$

Dwa pierwsze składniki sumy w nawiasie, to omawiane wcześniej poprawki geometryczna $\Omega_{1,\text{geo}}$ i dynamiczna $\Omega_{1,\text{dyn}}$. Niech kolejne będą oznaczone $\Omega_{1,\text{III}}$ i $\Omega_{1,\text{VI}}$. Trzecia związana jest z wyborem cechowania, a jej postać zdeterminowana jest przez warunek by rotację keplerowską definiować poprzez rotację pyłu zgodnie z omawianym tu rozumowaniem. Czwarta poprawka pojawia się w związku z zastąpieniem promienia współrzędnościowego r promieniem powierzchniowym $\hat{r}$.

3.2. Poprawki 1PN dla podstawowych parametrów

Rozdział ten dotyczy wszystkich post-newtonowskich poprawek do podstawowych parametrów modelu dyskutowanych w pracy [41]. Poniżej zaprezentowane zostały pełne wykresy oraz wartości na równiku dla pięciu funkcji określających dany układ, mianowicie gęstości ϱ_0 , ϱ_1 , potencjałów U_0 , U_1 i A_ϕ , oraz prędkości Ω_0 , $\Omega_{1,\text{geo}}$, $\Omega_{1,\text{dyn}}$, $\Omega_{1,\text{III}}$, $\Omega_{1,\text{IV}}$, $\Omega_{1,\text{III}} + \Omega_{1,\text{IV}}$ i współczynnika Ξ . Tak jak poprzednio, wykresy odnoszą się do trzech arbitralnie wybranych przykładów z rysunków 2.2, 2.3, 2.4, tym razem jednak dla funkcji F_1 i F_2 wyrażonych wzorami (3.6), (3.7). Lewe wykresy przedstawiają pełne profile, prawe wartości na równiku.

3.2.1. Przypadek pierwszy

Jest to analiza dyskutowanej już wcześniej i przedstawionej na rysunku 2.2 konfiguracji. Promień wewnętrzny zlokalizowany jest w $r_{\text{in}} = 25R_S$, promień zewnętrzny w $r_{\text{out}} = 250R_S$. Newtonowska masa dysku jest równa $M_D = 1.47 \times M_c$, natomiast $\omega_0 = 0.85\sqrt{2GM_c}$.

Wykresy na rysunku 3.1 przedstawiają równikowe wartości poprawek do prędkości kątowej. Należy zwrócić uwagę na fakt, że poprawki trzecia i czwarta są znacznie większe niż pozostałe dwie. Występują one jednak z przeciwnym znakiem i suma $\Omega_{1,\text{III}} + \Omega_{1,\text{VI}}$ jest tego samego rzędu co poprawki geometryczna i dynamiczna. Drugą istotną kwestią jest dwukrotne przegięcie na wykresie $\Xi(r)$ świadczące o zupełnie różnym przebiegu zmienności funkcji $\Omega_0(r)$ i $\Omega_1(r)$.

Rysunki 3.2 i 3.3 pozwalają porównać profile newtonowskiej i post-newtonowskiej prędkości kątowej. W pierwszym przypadku jest to założona zależność $\Omega_0 \propto r^{-3/2}$. Z grafiki drugiej widać, że post-newtonowska poprawka jest o dwa rzędy wielkości mniejsza i jest funkcją zarówno odległości od osi obrotu r jak i odległości od płaszczyzny symetrii z .

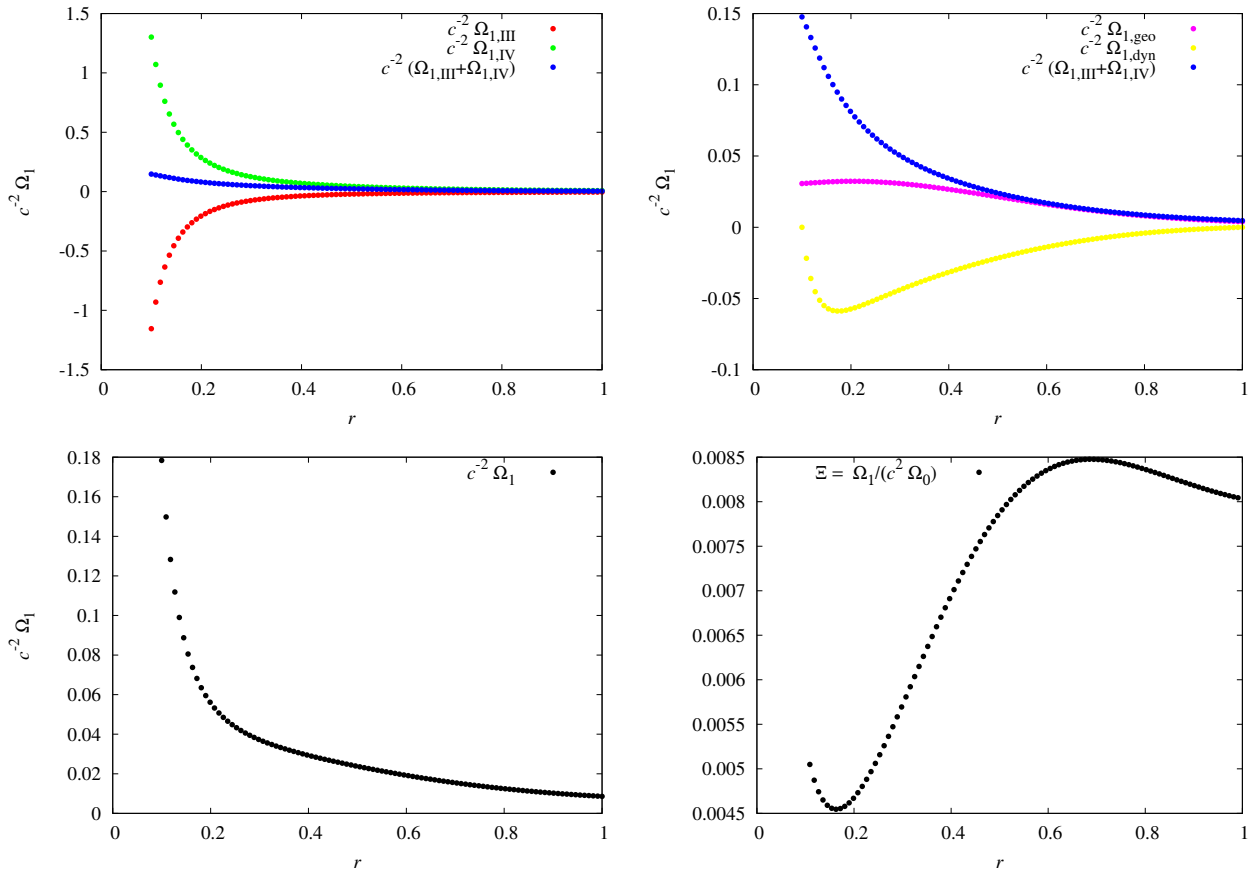
Rysunek 3.4 przedstawia iloraz Ξ będący miarą wkładu post-newtonowskiej poprawki do całego profilu prędkości. Poprawka ta stanowi tu od 5 do 8‰. Minima i maksima znajdują się na równiku. Prawy wykres pozwala na odczytanie ich wartości.

Rysunki 3.5 i 3.6 przedstawiają dyskutowane w rozdziale poprzednim poprawki geometryczną oraz dynamiczną (antywcłeczeniową). Obie poprawki zależą od zmiennej z poprzez zależność od potencjału rotacyjnego A_ϕ (poprawka geometryczna) oraz zależność od entalpii właściwej (poprawka dynamiczna). Suma tych dwóch składników może być ujemna lub dodatnia w zależności od konfiguracji, co było przedmiotem dyskusji w poprzednim rozdziale.

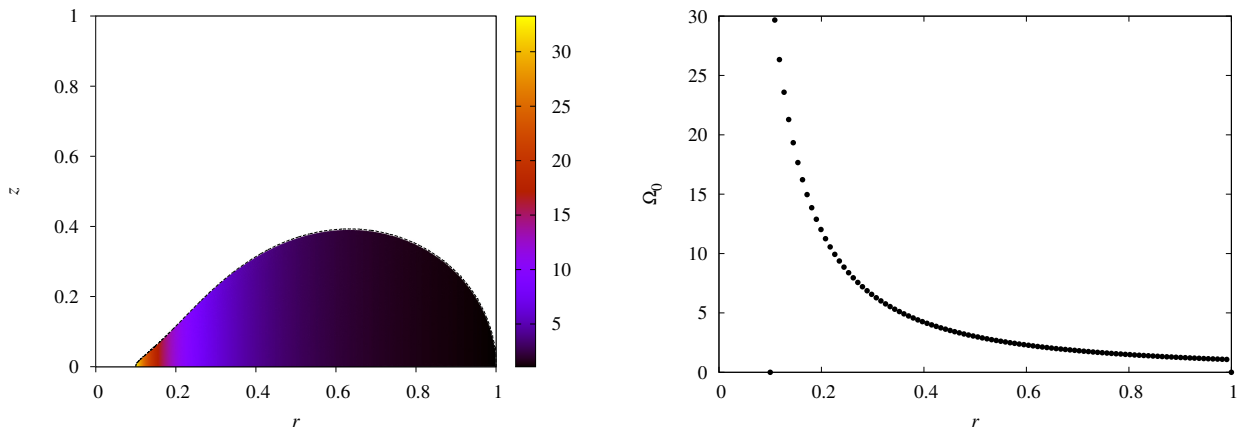
Rysunki 3.7 i 3.8 przedstawiają kolejne poprawki do prędkości kątowej $\Omega_{1,\text{III}}$ oraz $\Omega_{1,\text{IV}}$ i są efektem wyboru funkcji F_1 i F_2 . Funkcje te, a zarazem poprawki zależą jedynie od zmiennej radialnej. Same poprawki są o rząd wielkości większe od dwóch poprzednich $\Omega_{1,\text{geo}}$ i $\Omega_{1,\text{dyn}}$, jednakże występują z różnymi znakami i ich wartość po dodaniu do siebie jest już tego samego rzędu co poprawki geometrycznej i dynamicznej, co widać na rysunku 3.9.

Rysunki 3.10 i 3.11 przedstawiają newtonowski i post-newtonowski profil gęstości ϱ_0 i ϱ_1 odpowiednio. Post-newtonowska poprawka jest tutaj o rząd wielkości mniejsza i ma ujemny znak. Oznacza, to, że w rozważanym problemie gęstość barionowa dysku jest mniejsza niż w newtonowskim modelu. Należy zwrócić uwagę, że poprawka do gęstości barionowej ϱ_1 nie daje informacji o poprawce do masy dysku $M_{1\text{PN}}$, gdyż tę należałoby wyliczyć jako całkę objętościową z prawej strony równania (2.64).

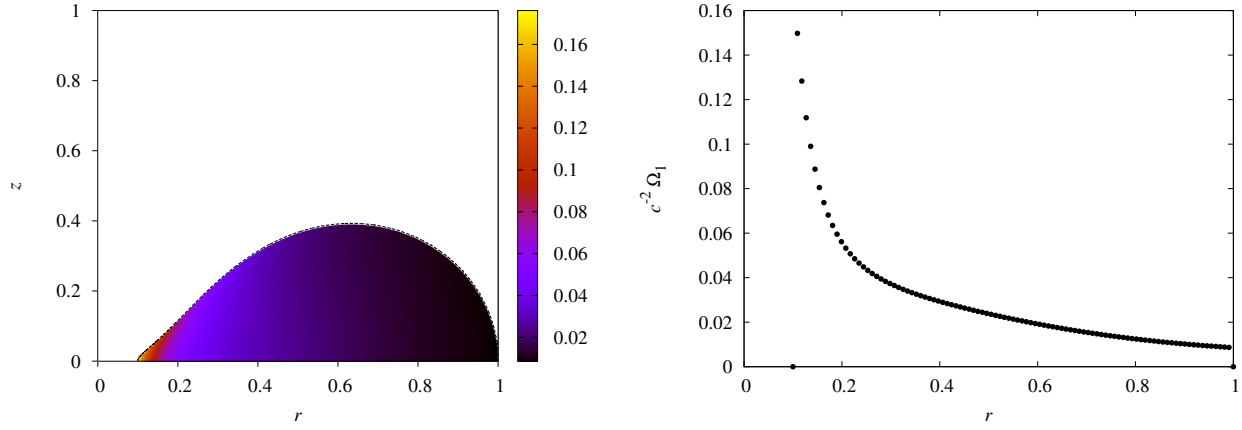
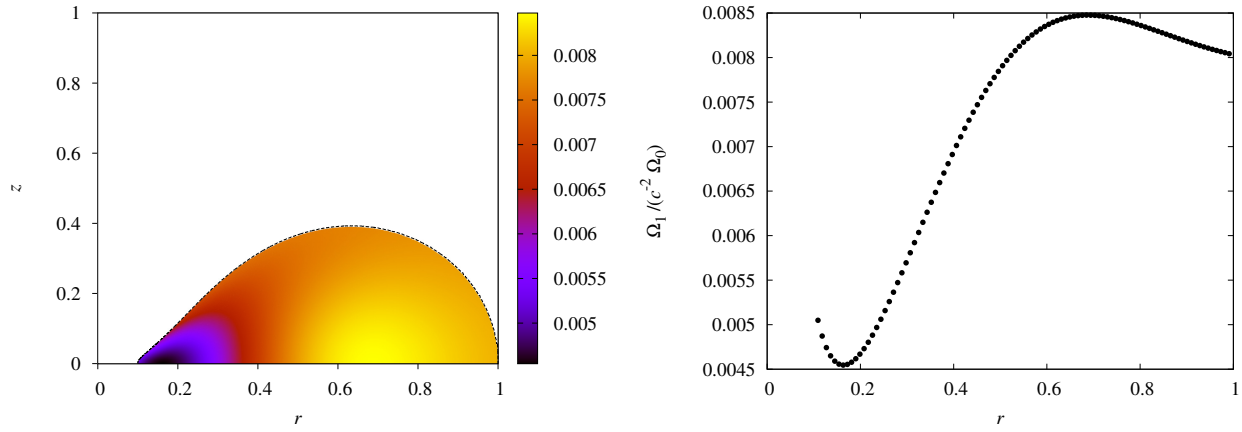
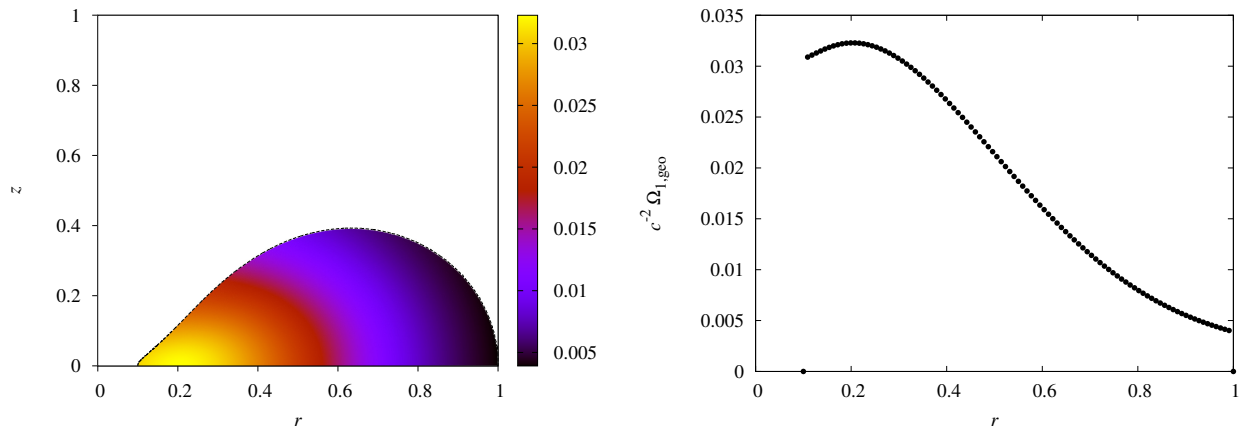
Rysunki 3.12 i 3.13 przedstawiające potencjały grawitacyjne U_0 i U_1 zamieszczone są tutaj by porównać wkład obu składników do wypadkowego potencjału U . Post-newtonowska poprawka jest tutaj dodatnia, ma więc przeciwny znak niż jej newtonowski odpowiednik. Oznacza to, że układ jest słabiej związany za sprawą post-newtonowskiej poprawki. Dla potencjału rotacyjnego A_ϕ przedstawionego na rysunku 3.12 nie ma żadnej skali porównawczej ze względu na czysto relatywistyczny charakter tej wielkości.

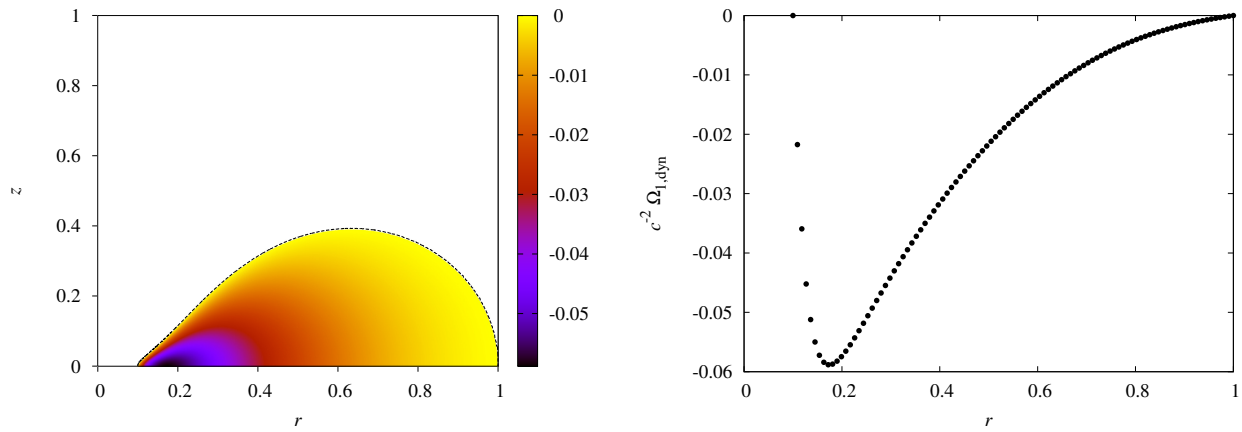


Rysunek 3.1. Dane dla konfiguracji z wykresu 2.2 przedstawiające wartości wybranych profili na równiku. Lewy górny wykres przedstawia poprawkę $\Omega_{1,III}/c^2$ (czerwone punkty), $\Omega_{1,IV}/c^2$ (zielone punkty) oraz ich sumę (niebieskie punkty). Prawy górny wykres przedstawia poprawkę geometryczną $\Omega_{1,geo}/c^2$ (fioletowe punkty), poprawkę dynamiczną $\Omega_{1,dyn}/c^2$ (żółte punkty) oraz sumę poprawek trzeciej i czwartej (niebieskie punkty). Lewy dolny wykres przedstawia sumę wszystkich poprawek, natomiast prawy dolny stosunek post-newtonowskiej poprawki do wartości newtonowskiej.

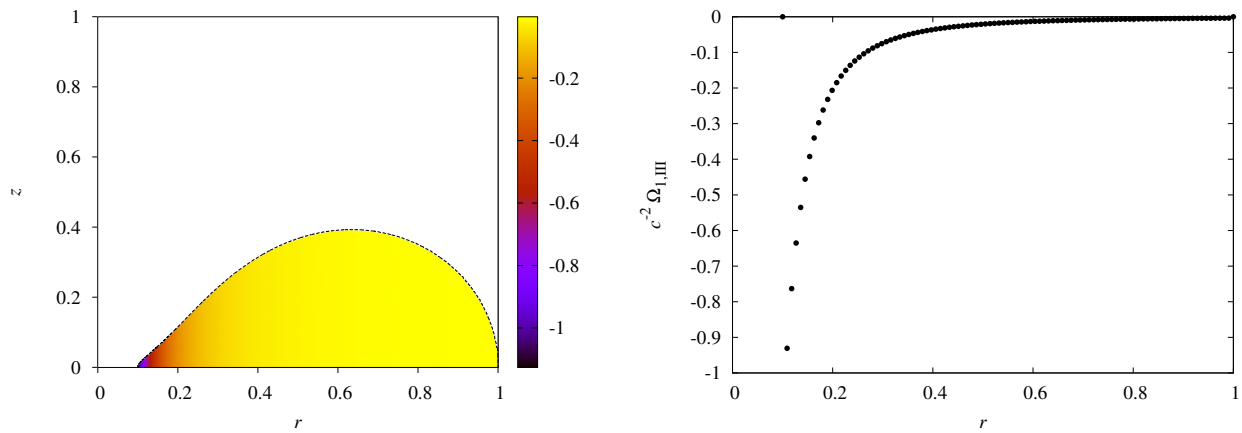


Rysunek 3.2. Newtonowska prędkość kątowna Ω_0 .

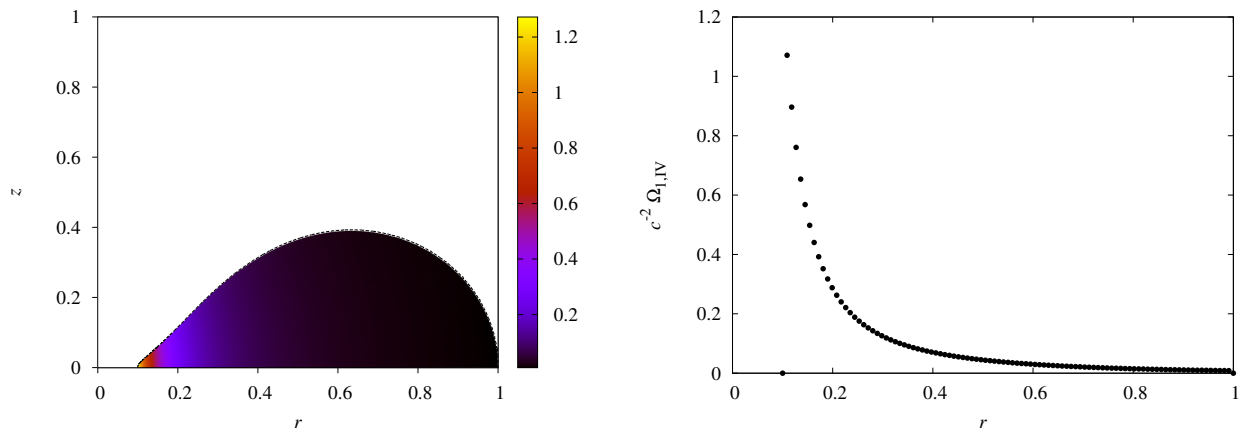
Rysunek 3.3. Post-newtonowska poprawka do prędkości kątowej $c^{-2}\Omega_1$.Rysunek 3.4. Iloraz post-newtonowskiej poprawki do prędkości kątowej i prędkości newtonowskiej $\Omega_1/(c^2\Omega_0)$.Rysunek 3.5. Składowa geometryczna post-newtonowskiej poprawki do prędkości kątowej $c^{-2}\Omega_{1,geo}$.



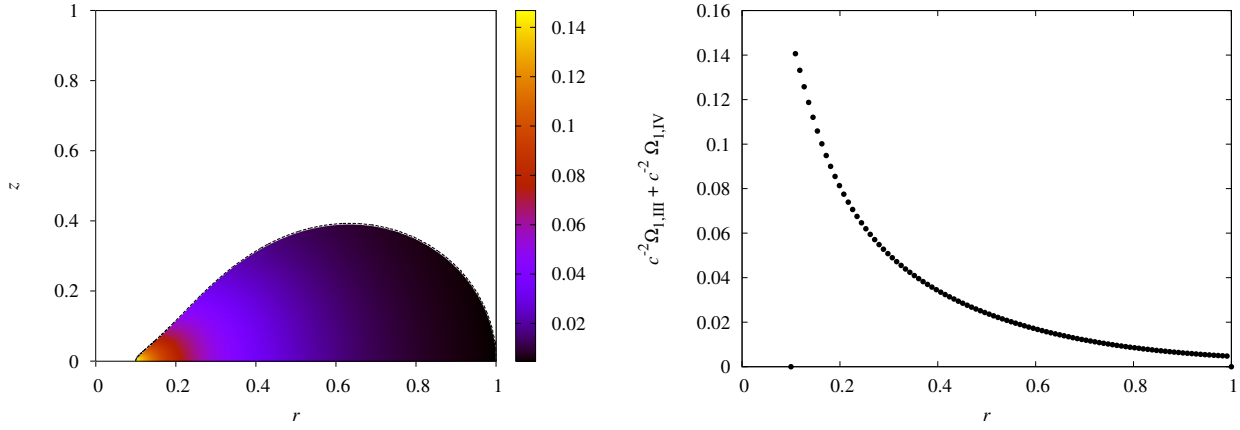
Rysunek 3.6. Składowa dynamiczna post-newtonowskiej poprawki do prędkości kątowej $c^{-2}\Omega_{1,dyn}$.



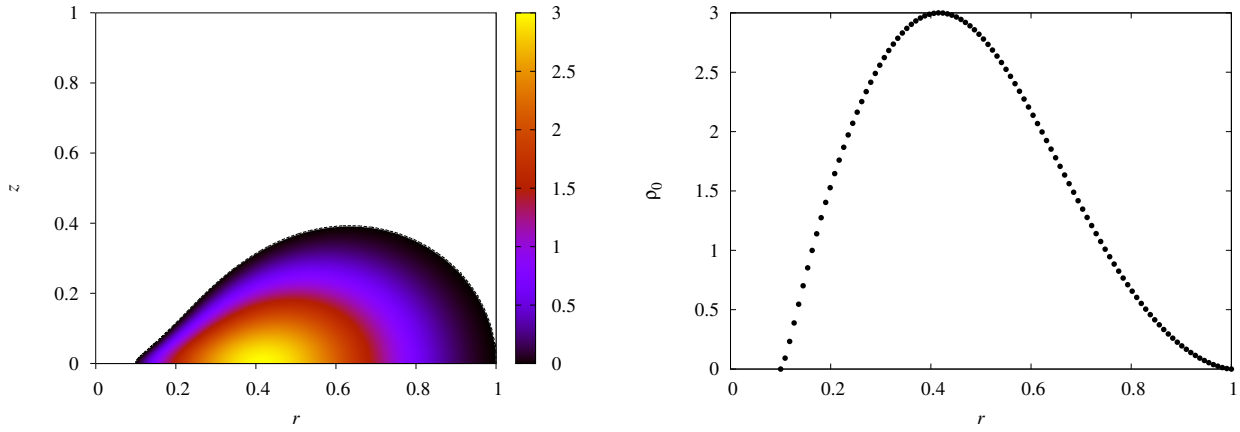
Rysunek 3.7. Trzecia składowa post-newtonowskiej poprawki do prędkości kątowej $c^{-2}\Omega_{1,III}$.



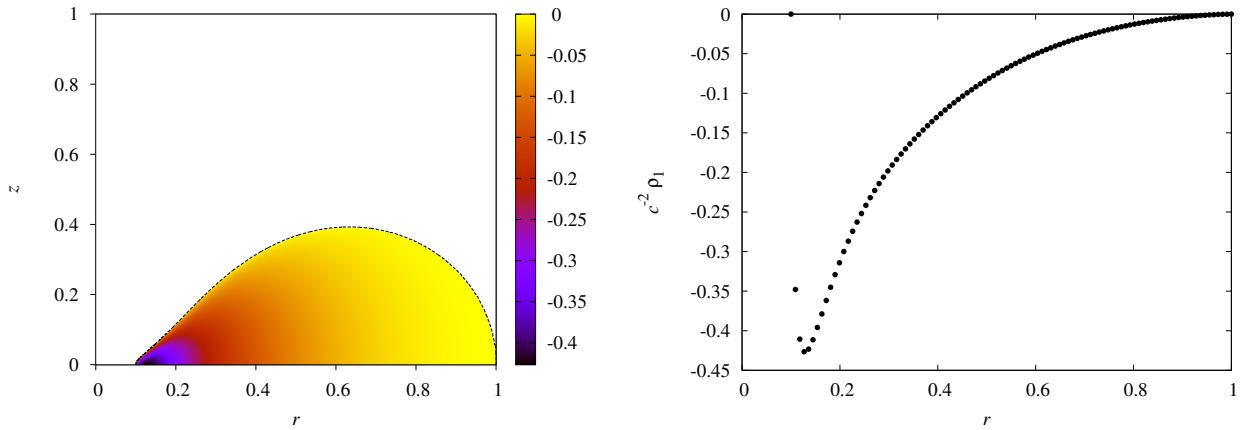
Rysunek 3.8. Czwarta składowa post-newtonowskiej poprawki do prędkości kątowej $c^{-2}\Omega_{1,IV}$.



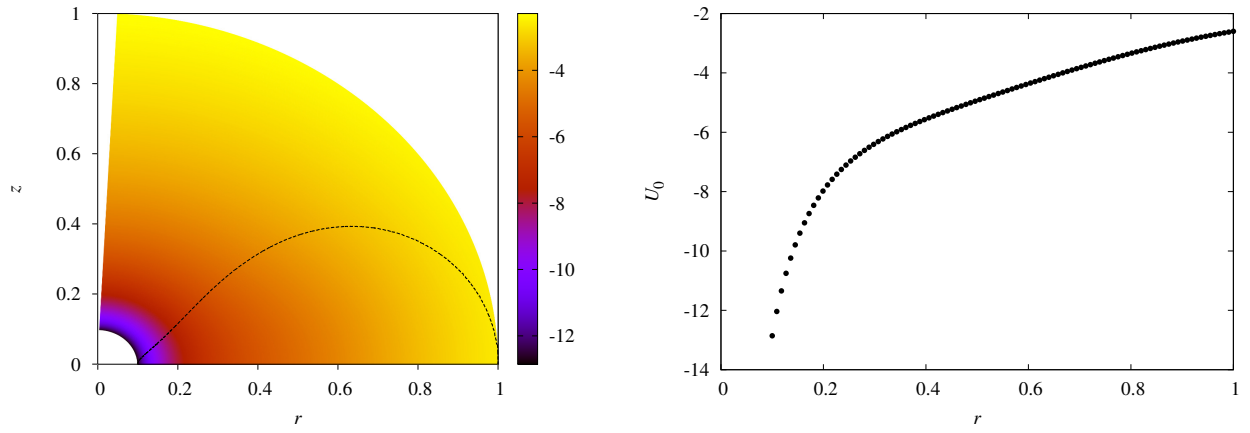
Rysunek 3.9. Suma składowych trzeciej i czwartej $c^{-2}\Omega_{1,III} + c^{-2}\Omega_{1,IV}$.



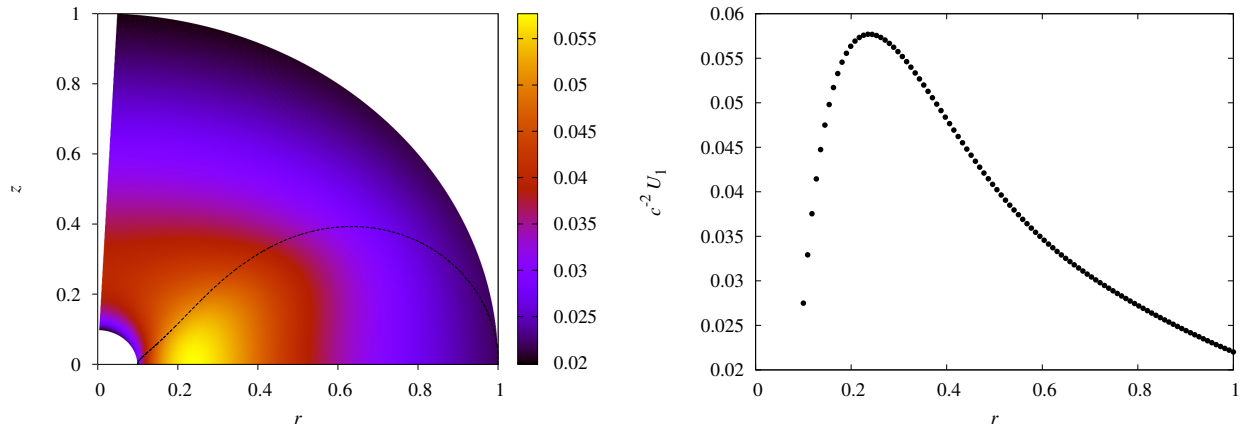
Rysunek 3.10. Newtonowska gęstość barionowa materii dyskowej ϱ_0 .



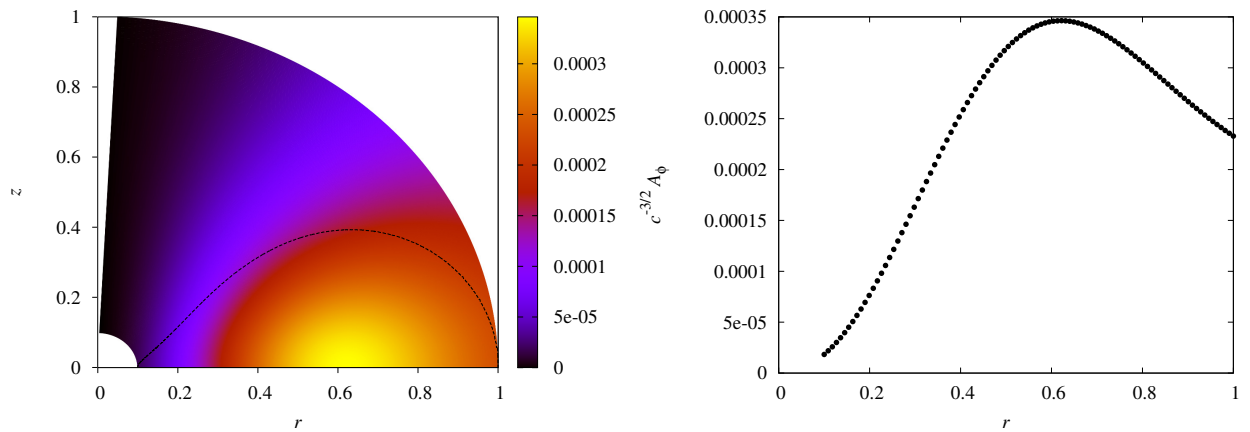
Rysunek 3.11. Post-newtonowska gęstość barionowa materii dyskowej $c^{-2}\varrho_1$.



Rysunek 3.12. Newtonowski potencjał grawitacyjny U_0 z zaznaczonym konturem dysku.



Rysunek 3.13. Post-newtonowski potencjał grawitacyjny $c^{-2}U_1$ z zaznaczonym konturem dysku.

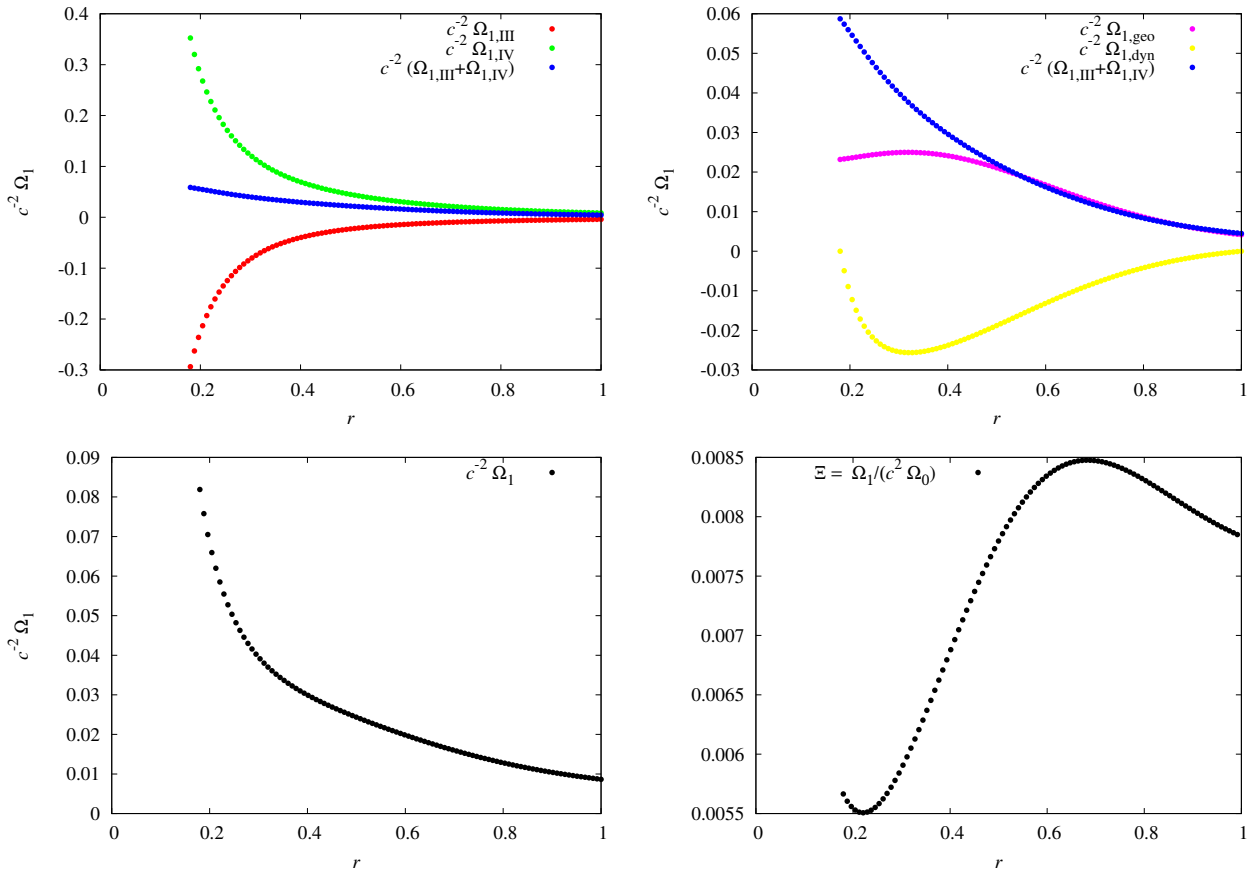


Rysunek 3.14. Potencjał rotacyjny $c^{-3/2}A_\phi$ z zaznaczonym konturem dysku.

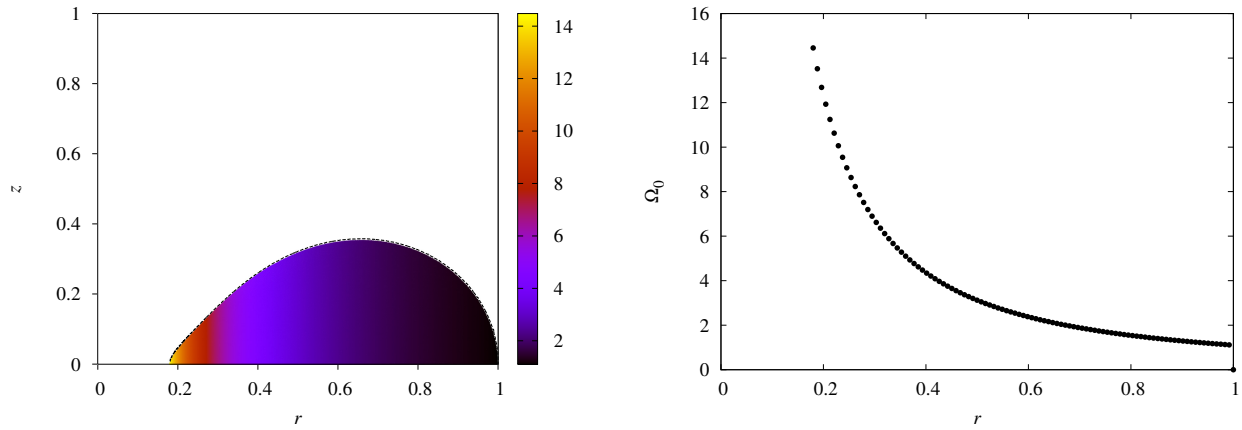
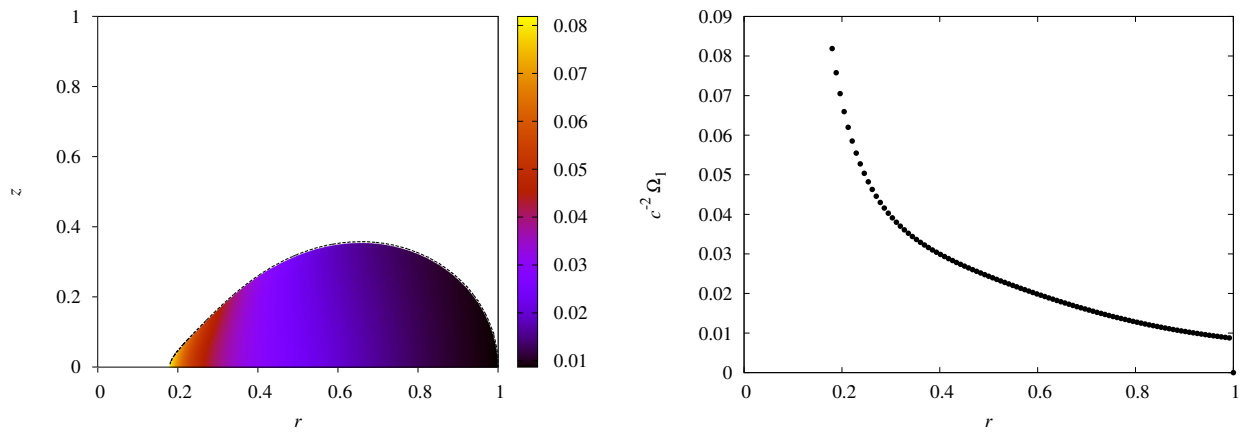
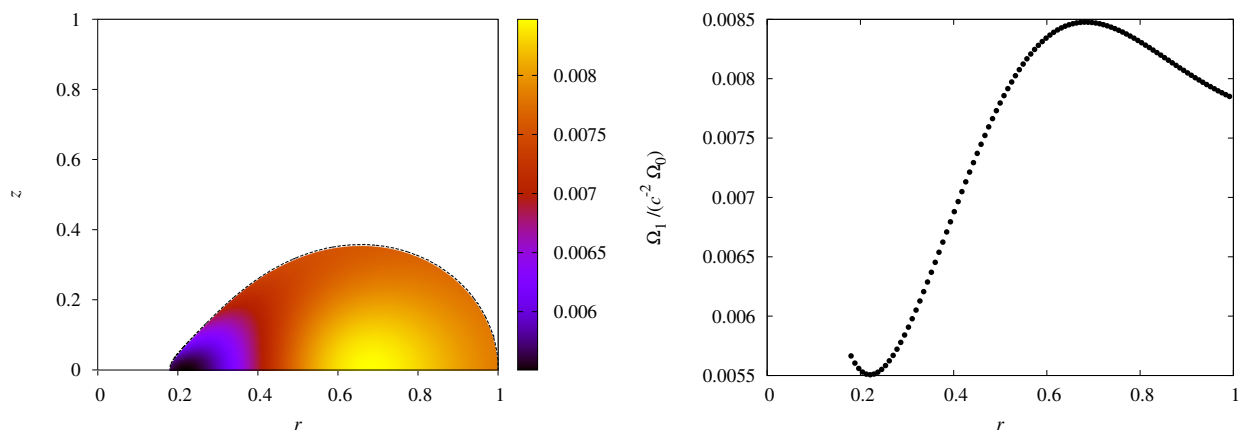
3.2.2. Przypadek drugi

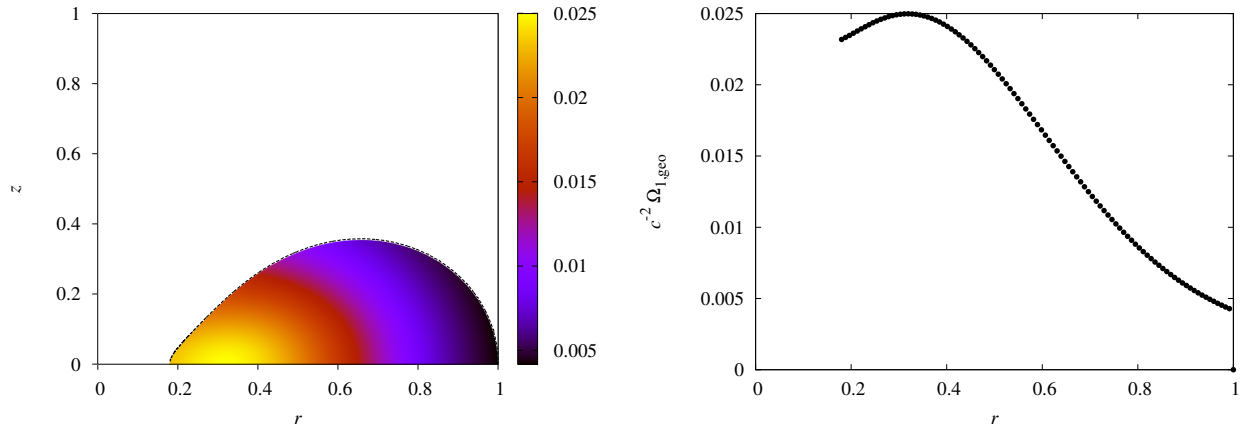
Jest to analiza dyskutowanej już wcześniej i przedstawionej na rysunku 2.3 konfiguracji. Promień wewnętrzny zlokalizowany jest w $r_{\text{in}} = 81R_S$, promień zewnętrzny w $r_{\text{out}} = 450R_S$. Newtonowska masa dysku jest równa $M_D = 1.4 \times M_c$, natomiast $\omega_0 = 1.186\sqrt{2GM_c}$.

Przypadek ten różni się od pierwszego promieniem wewnętrznym dysku. Jakościowa analiza poszczególnych profili jest podobna do tej z przykładu poprzedniego. Funkcje charakteryzujące te dwie konfiguracje mają analogiczne przebiegi zmienności. Ilościowa różnica polega na tym, że poszczególne ekstrema przyjmują tutaj niższe wartości oraz są bardziej rozmyte, co daje się zauważyć porównując rysunki z przypadków pierwszego i drugiego, jak np. 3.6 i 3.20 przedstawiające poprawkę dynamiczną Ω_{dyn} , rysunki 3.11 i 3.25 przedstawiające poprawkę do gęstości barionowej ϱ_1 , oraz rysunki 3.13 i 3.27 przedstawiające poprawkę do potencjału grawitacyjnego. Różnice pojawiające się w tych dwóch konfiguracjach o różnych promieniach wewnętrznych są niewielkie w przypadku profili wielkości newtonowskich (ϱ_0 , U_0), wyraźnie większe z kolei dla wielkości post-newtonowskich (ϱ_1 , U_1). Stąd wniosek, że post-newtonowskie poprawki wykazują większą zależność od geometrii układu.

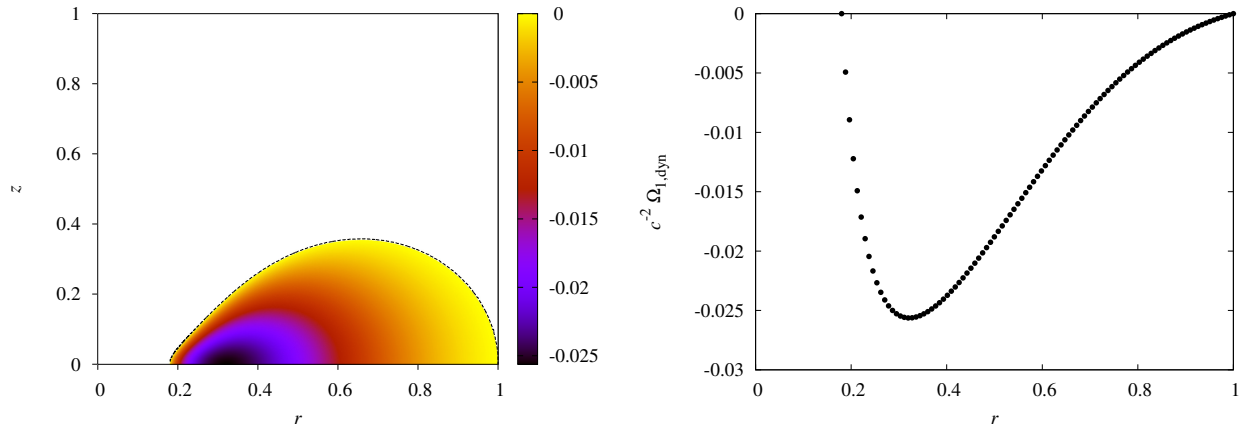


Rysunek 3.15. Dane dla konfiguracji z wykresu 2.3 przedstawiające wartości wybranych profili na równiku. Lewy górny wykres przedstawia poprawkę $\Omega_{1,\text{III}}/c^2$ (czerwone punkty), $\Omega_{1,\text{IV}}/c^2$ (zielone punkty) oraz ich sumę (niebieskie punkty). Prawy górny wykres przedstawia poprawkę geometryczną $\Omega_{1,\text{geo}}/c^2$ (fioletowe punkty), poprawkę dynamiczną $\Omega_{1,\text{dyn}}/c^2$ (żółte punkty) oraz sumę poprawek trzeciej i czwartej (niebieskie punkty). Lewy dolny wykres przedstawia sumę wszystkich poprawek, natomiast prawy dolny stosunek post-newtonowskiej poprawki do wartości newtonowskiej.

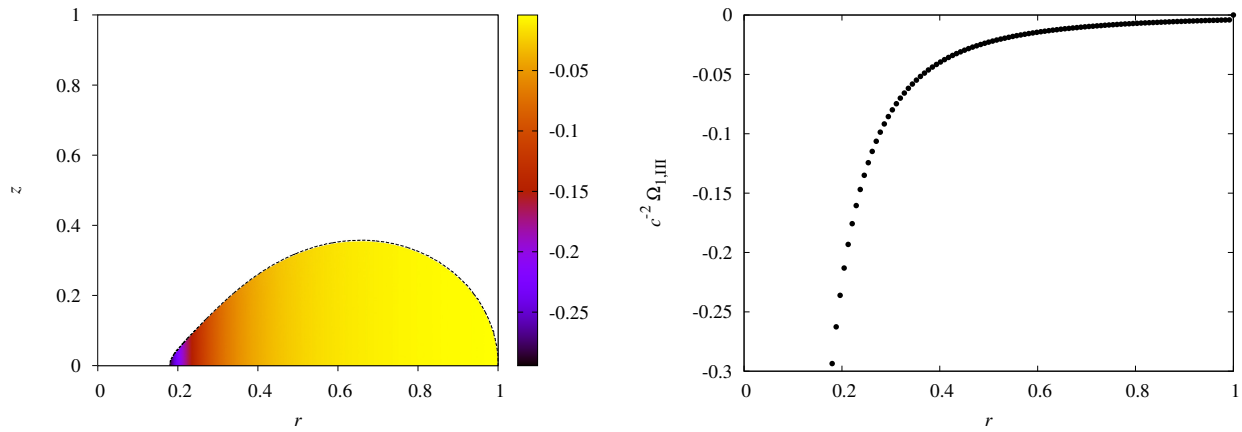
Rysunek 3.16. Newtonowska prędkość kątowna Ω_0 .Rysunek 3.17. Post-newtonowska poprawka do prędkości kątownej $c^{-2}\Omega_1$.Rysunek 3.18. Iloraz post-newtonowskiej poprawki do prędkości kątownej i prędkości newtonowskiej $\Omega_1/(c^2\Omega_0)$.



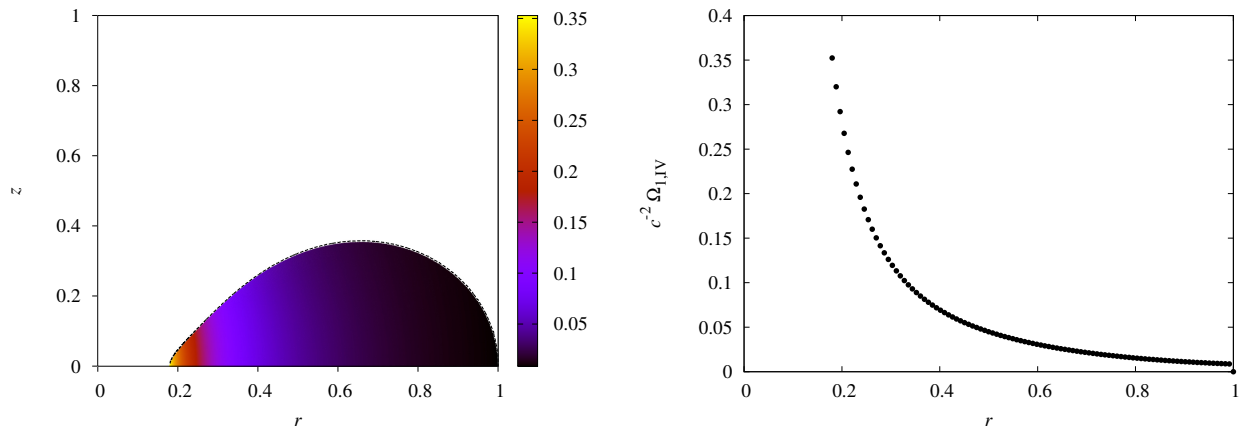
Rysunek 3.19. Składowa geometryczna post-newtonowskiej poprawki do prędkości kątowej $c^{-2}\Omega_{1,\text{geo}}$.



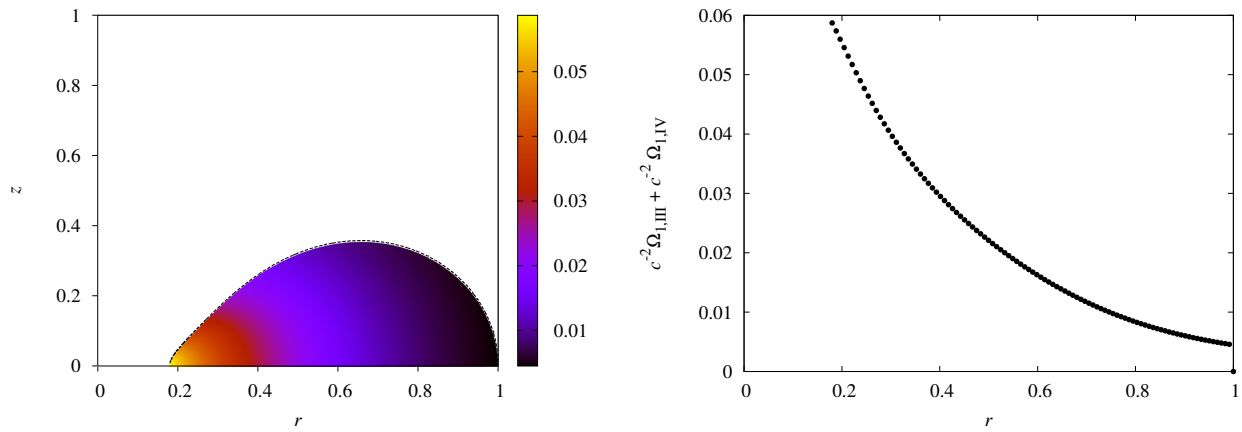
Rysunek 3.20. Składowa dynamiczna post-newtonowskiej poprawki do prędkości kątowej $c^{-2}\Omega_{1,\text{dyn}}$.



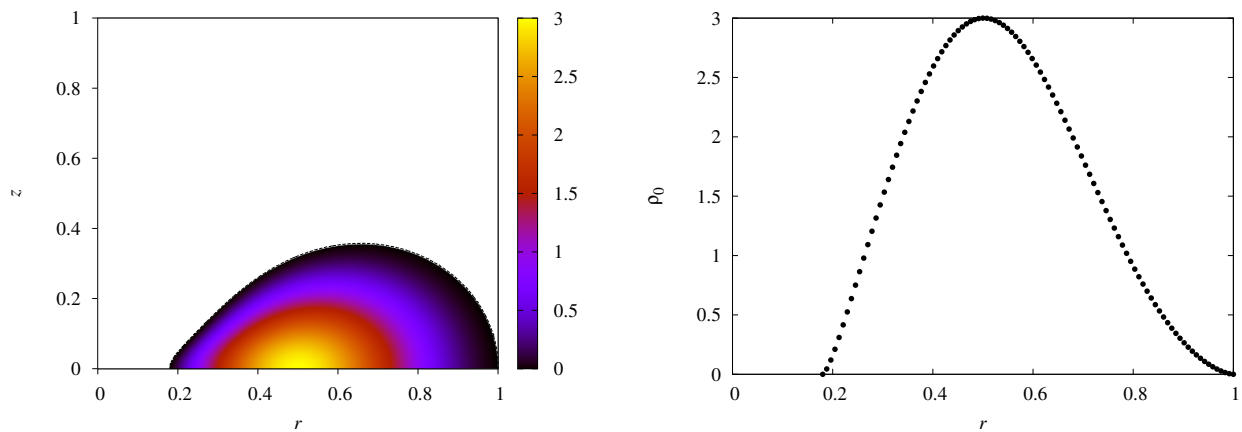
Rysunek 3.21. Trzecia składowa post-newtonowskiej poprawki do prędkości kątowej $c^{-2}\Omega_{1,\text{III}}$.



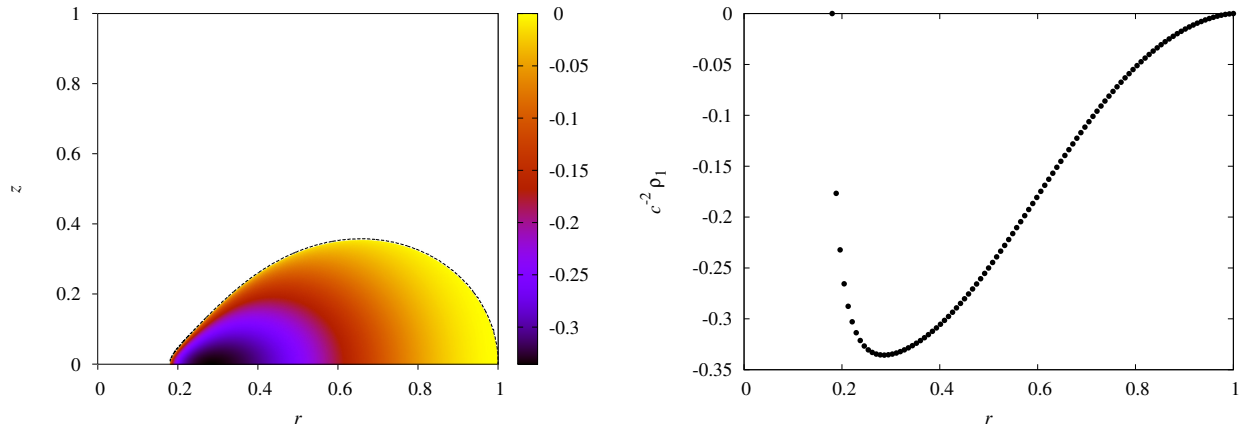
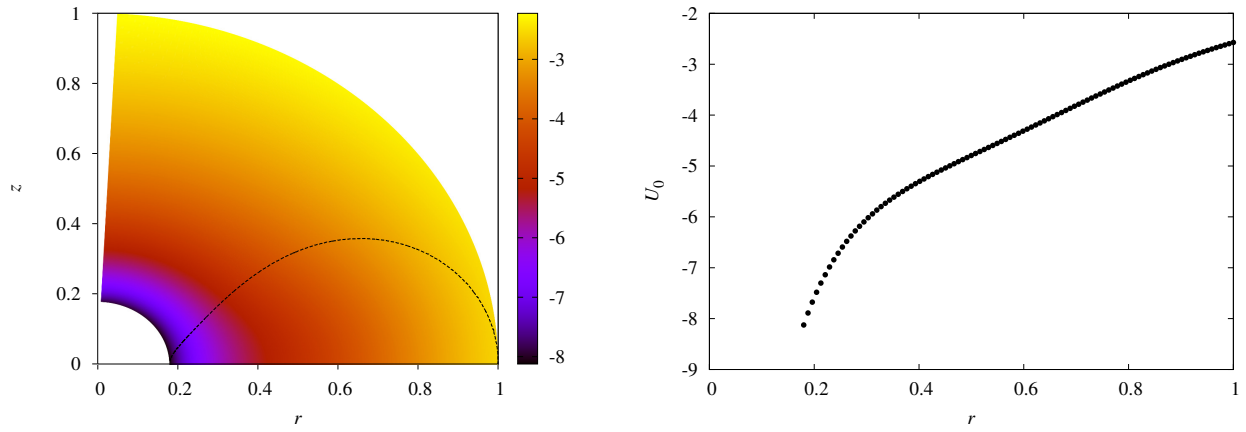
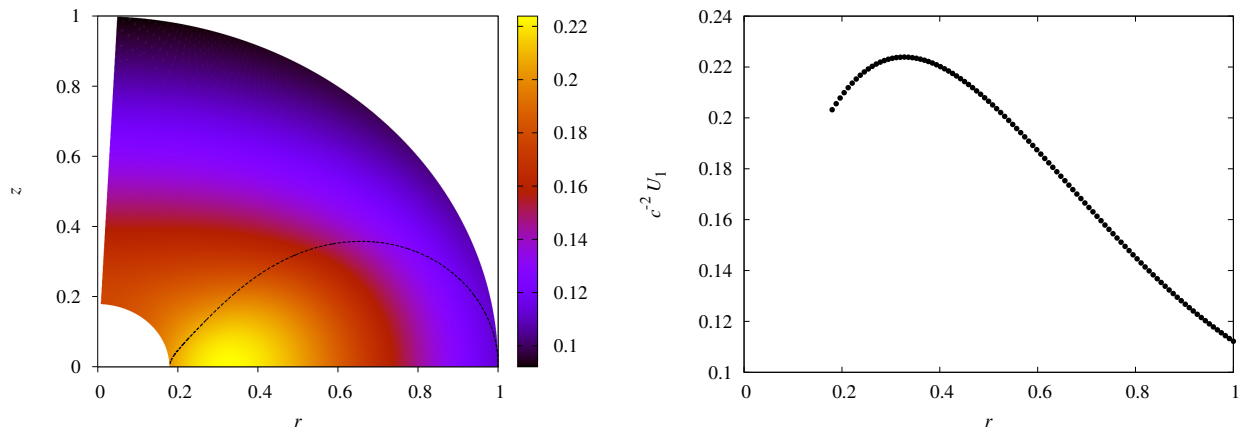
Rysunek 3.22. Czwartą składową post-newtonowskiej poprawki do prędkości kątowej $c^{-2}\Omega_{1,IV}$.

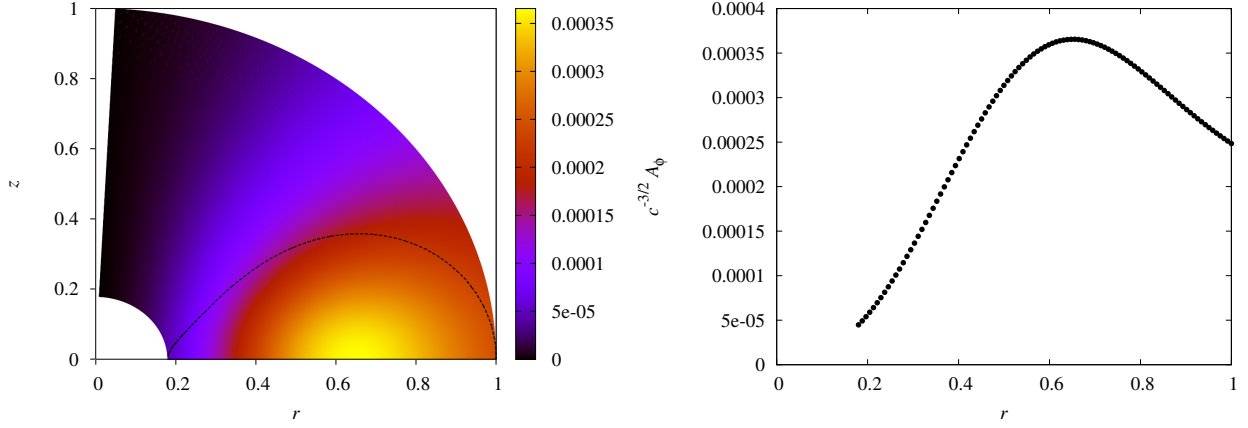


Rysunek 3.23. Suma składowych trzeciej i czwartej $c^{-2}\Omega_{1,III} + c^{-2}\Omega_{1,IV}$.



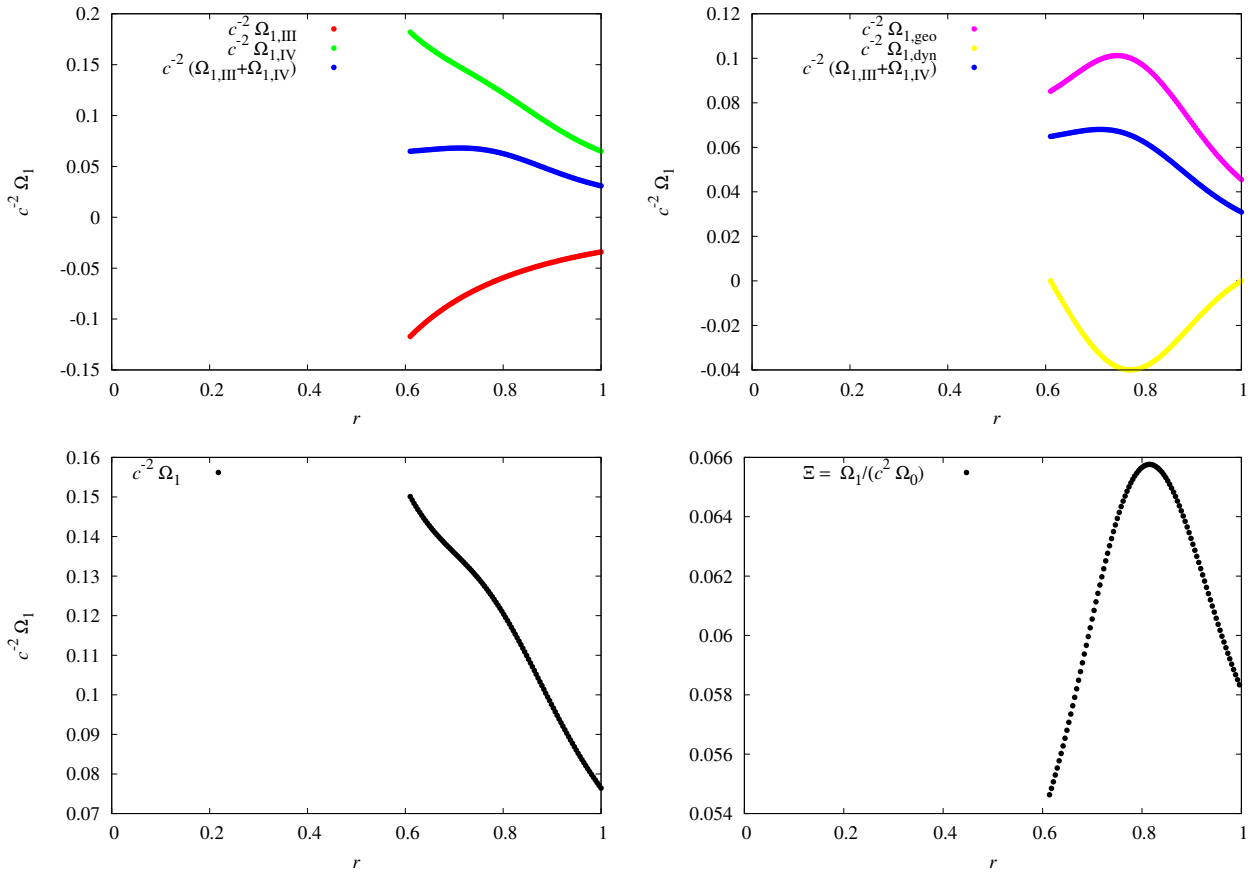
Rysunek 3.24. Newtonowska gęstość barionowa materii dyskowej ϱ_0 .

Rysunek 3.25. Post-newtonowska gęstość barionowa materii dyskowej $c^{-2}\varrho_1$.Rysunek 3.26. Newtonowski potencjał grawitacyjny U_0 z zaznaczonym konturem dysku.Rysunek 3.27. Post-newtonowski potencjał grawitacyjny $c^{-2}U_1$ z zaznaczonym konturem dysku.



Rysunek 3.28. Potencjał rotacyjny $c^{-3/2} A_\phi$ z zaznaczonym konturem dysku.

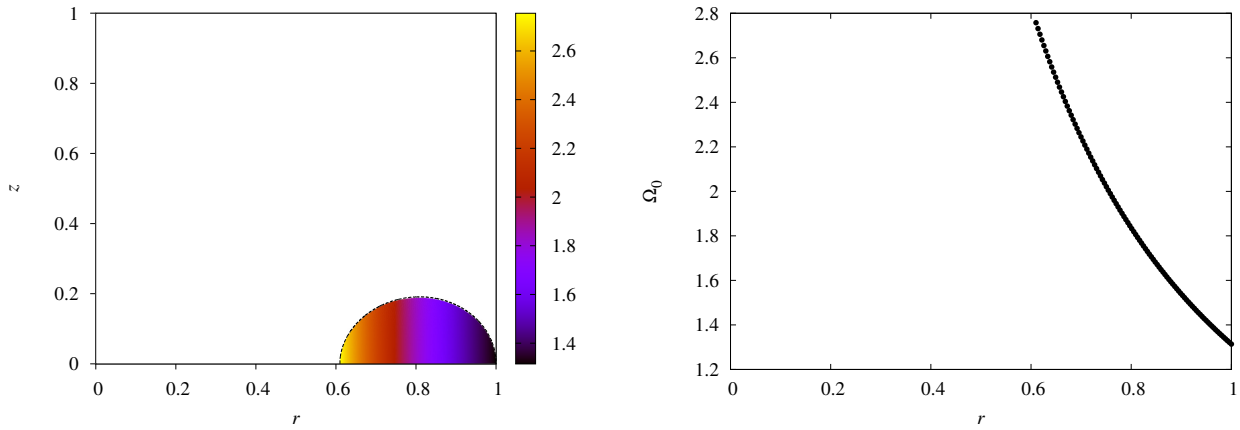
3.2.3. Przypadek trzeci



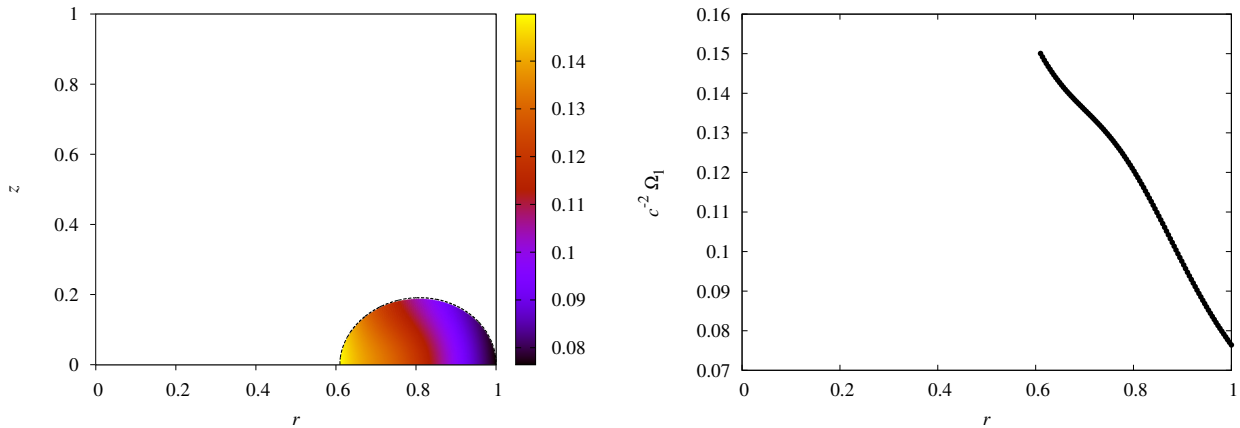
Rysunek 3.29. Dane dla konfiguracji z wykresu 2.4 przedstawiające wartości wybranych profili na równiku. Lewy górny wykres przedstawia poprawkę $\Omega_{1,\text{III}}/c^2$ (czerwone punkty), $\Omega_{1,\text{IV}}/c^2$ (zielone punkty) oraz ich sumę (niebieskie punkty). Prawy górny wykres przedstawia poprawkę geometryczną $\Omega_{1,\text{geo}}/c^2$ (fioletowe punkty), poprawkę dynamiczną $\Omega_{1,\text{dyn}}/c^2$ (żółte punkty) oraz sumę poprawek trzeciej i czwartej (niebieskie punkty). Lewy dolny wykres przedstawia sumę wszystkich poprawek, natomiast prawy dolny stosunek post-newtonowskiej poprawki do wartości newtonowskiej.

Jest to analiza dyskutowanej już wcześniej i przedstawionej na rysunku 2.4 konfiguracji. Promień wewnętrzny zlokalizowany jest w $r_{\text{in}} = 30.5R_S$, promień zewnętrzny w $r_{\text{out}} = 50R_S$. Newtonowska masa dysku jest równa $M_D = 1.8 \times M_c$, natomiast $\omega_0 = 1.31\sqrt{2GM_c}$.

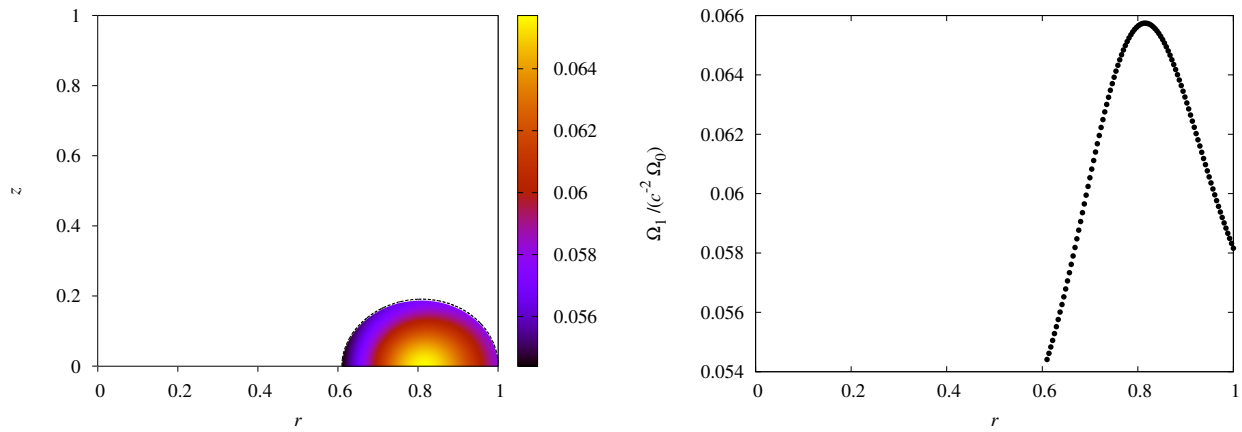
Przypadek ten jest bardziej relatywistyczny niż dwa poprzednie czego przejawem jest przedstawiony na wykresie 3.32 stosunek prędkości newtonowskiej do pierwszej post-newtonowskiej poprawki sięgający tu maksymalnie do 6%. Zgodnie z oczekiwaniami, pozostałe poprawki są również odpowiednio większe. Maksima oraz minima dla większości profili pojawiają się w sposób analogiczny do wcześniejszych. W przypadku profilu wielkości Ξ brak jest minimum obserwowanego w poprzednich przykładach. Dla rozważanej konfiguracji jest to jedyna jakościowa różnica.



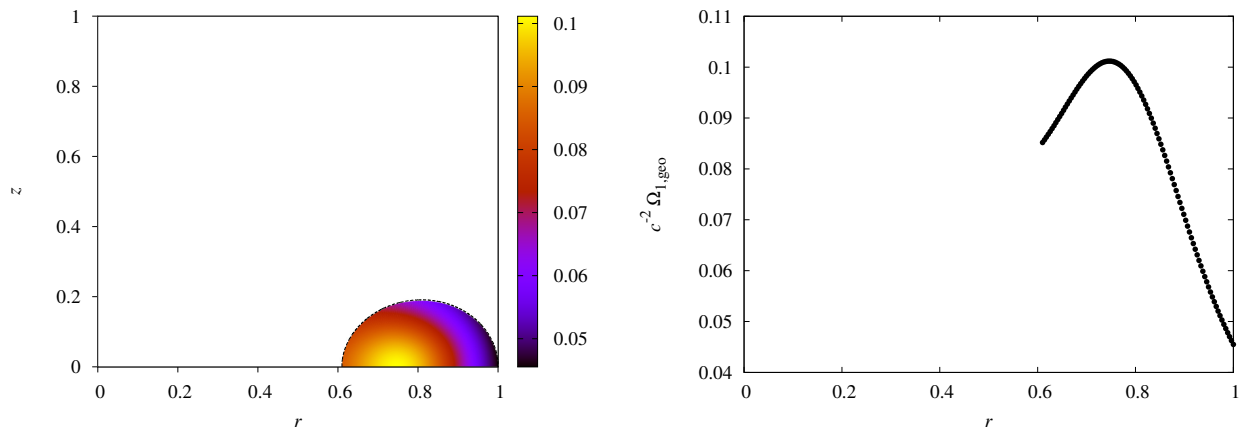
Rysunek 3.30. Newtonowska prędkość kątowna Ω_0 .



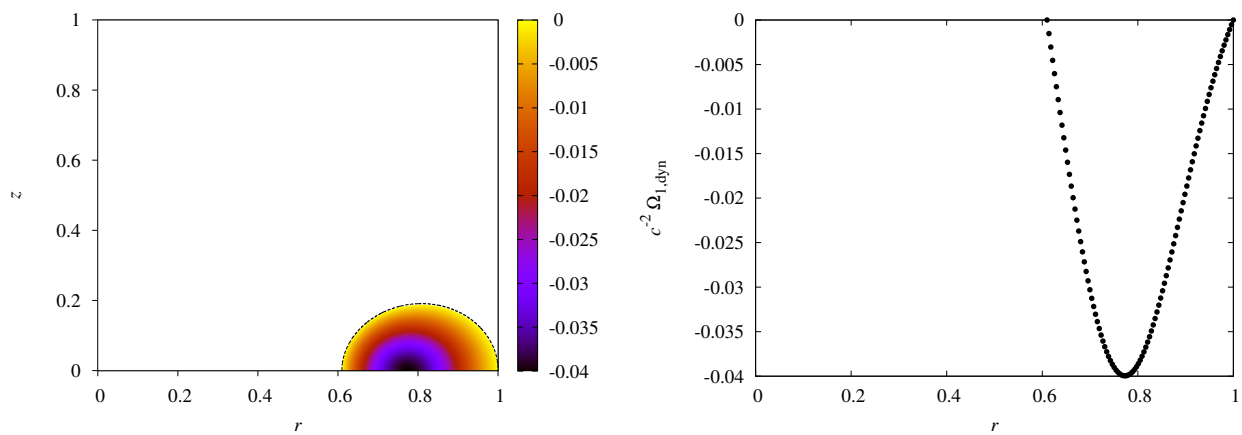
Rysunek 3.31. Post-newtonowska poprawka do prędkości kątownej $c^{-2}\Omega_1$.



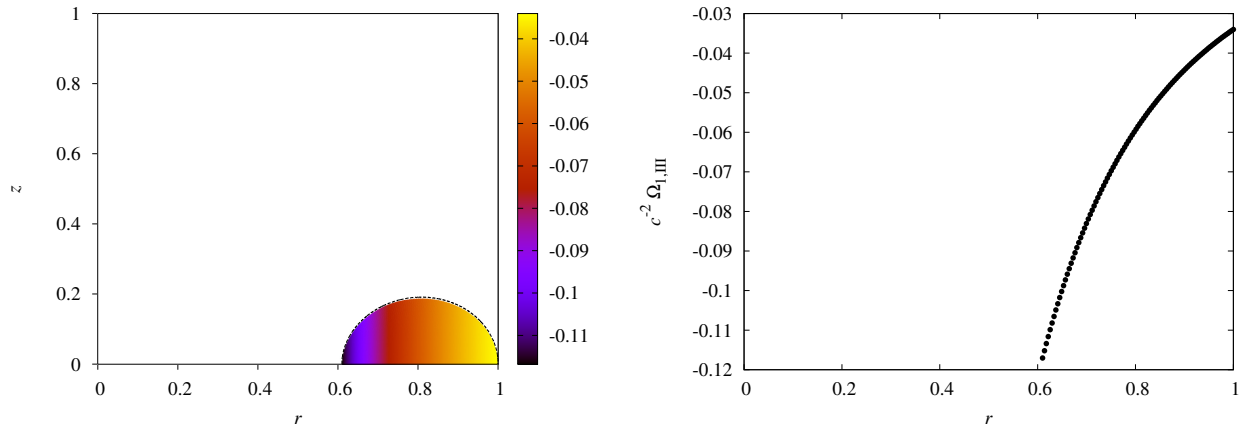
Rysunek 3.32. Iloraz post-newtonowskiej poprawki do prędkości kątowej i prędkości newtonowskiej $\Omega_1/(c^2\Omega_0)$.



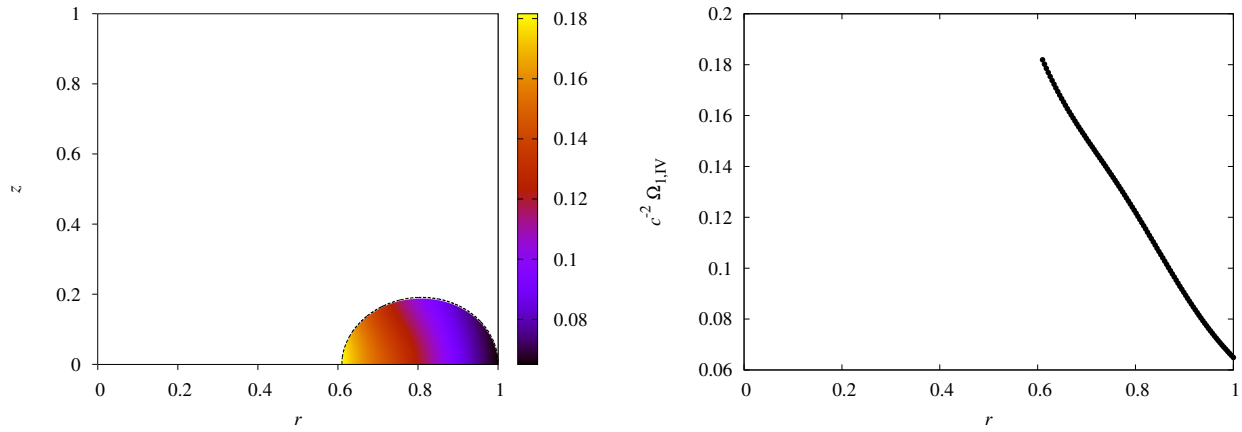
Rysunek 3.33. Składowa geometryczna post-newtonowskiej poprawki do prędkości kątowej $c^{-2}\Omega_{1,\text{geo}}$.



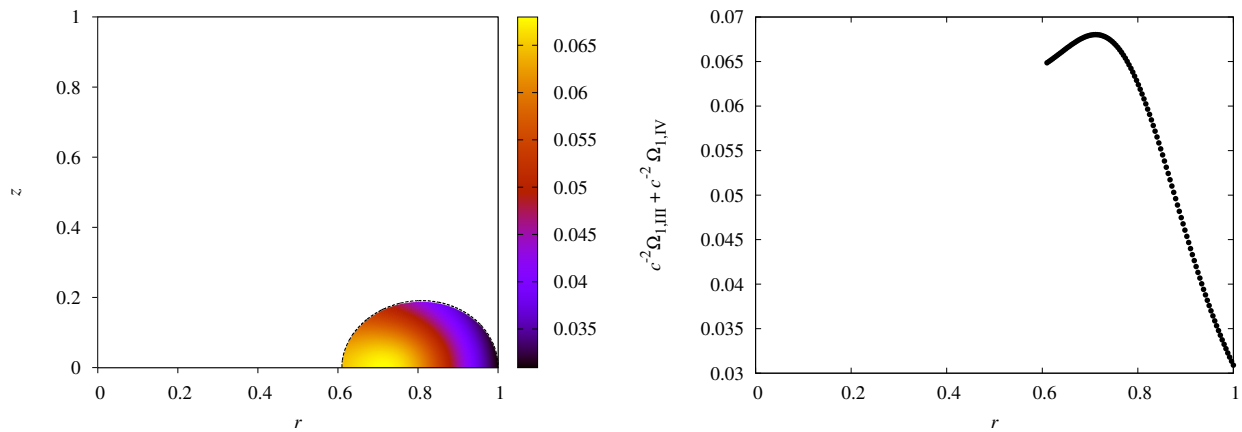
Rysunek 3.34. Składowa dynamiczna post-newtonowskiej poprawki do prędkości kątowej $c^{-2}\Omega_{1,\text{dyn}}$.



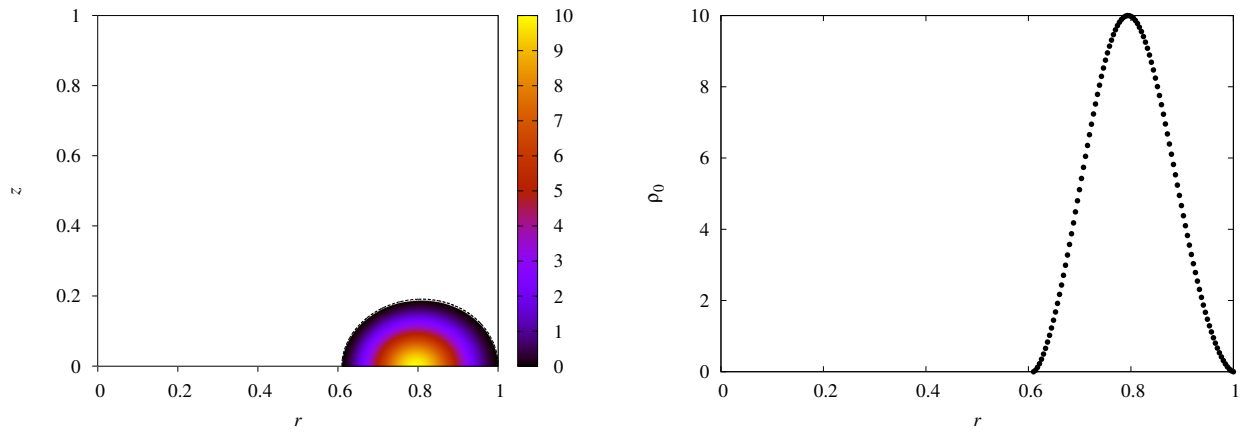
Rysunek 3.35. Trzecia składowa post-newtonowskiej poprawki do prędkości kątowej $c^{-2}\Omega_{1,III}$.



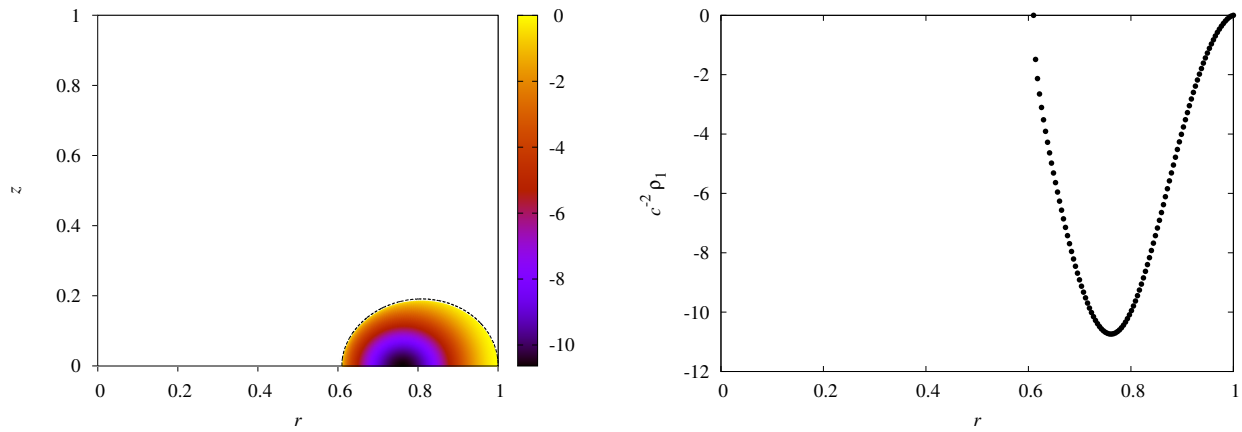
Rysunek 3.36. Czwarta składowa post-newtonowskiej poprawki do prędkości kątowej $c^{-2}\Omega_{1,IV}$.



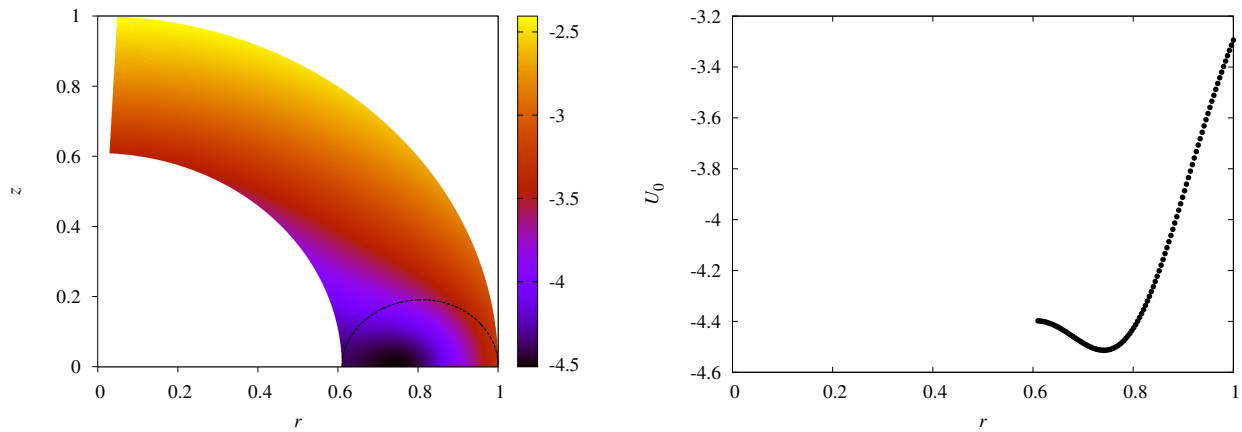
Rysunek 3.37. Suma składowych trzeciej i czwartej $c^{-2}\Omega_{1,III} + c^{-2}\Omega_{1,IV}$.



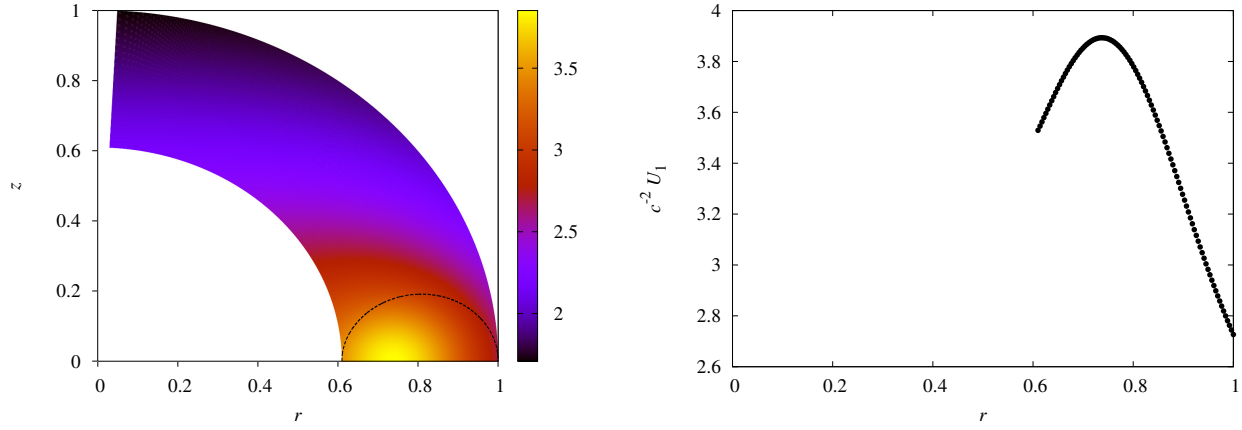
Rysunek 3.38. Newtonowska gęstość barionowa materii dyskowej ϱ_0 .



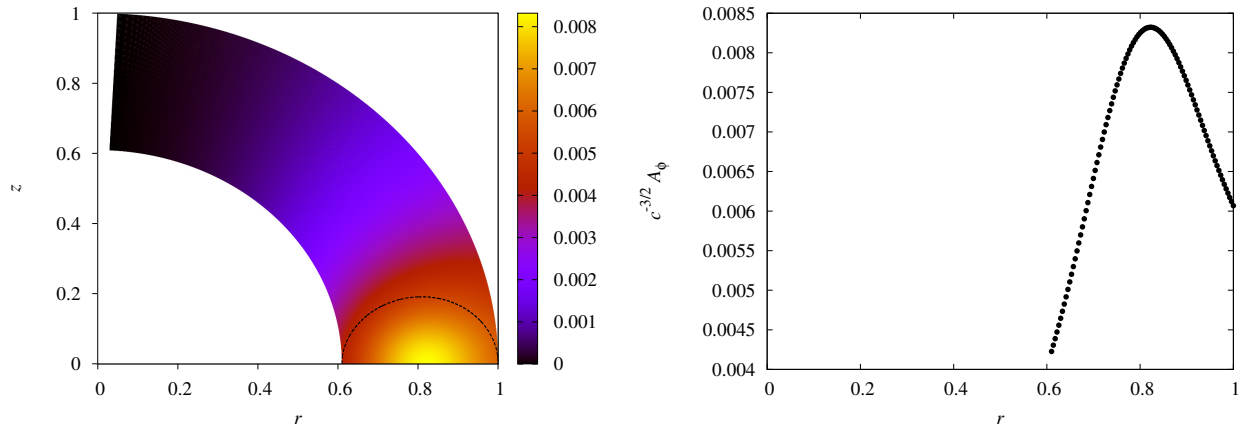
Rysunek 3.39. Post-newtonowska gęstość barionowa materii dyskowej $c^{-2}\varrho_1$.



Rysunek 3.40. Newtonowski potencjał grawitacyjny U_0 z zaznaczonym konturem dysku.



Rysunek 3.41. Post-newtonowski potencjał grawitacyjny $c^{-2}U_1$ z zaznaczonym konturem dysku.



Rysunek 3.42. Potencjał rotacyjny $c^{-3/2}A_\phi$ z zaznaczonym konturem dysku.

3.3. Wnioski

Przedstawione zostało rozumowanie prowadzące do zdefiniowania pojęcia *rotacja keplerowska* w większej ogólności niż było to czynione dotychczas. Bazując na tej ogólnej definicji, równania z rozdziału 2 uzupełnione zostały o odpowiednie człony. Drugim celem tego rozdziału było wyeksponowanie możliwości kodu numerycznego jako narzędzia, które zostało opracowane w celu wyznaczenia pięciu pól $\varrho_0(\mathbf{x})$, $\varrho_1(\mathbf{x})$, $A_\phi(\mathbf{x})$, $U_0(\mathbf{x})$, $U_1(\mathbf{x})$ których znajomość pozwala na zbadanie całej mechaniki takiego układu w reżimie 1PN. Pola te zostały przedstawione na wykresach, na których widać, że wpływ post-newtonowskich poprawek do prędkości kątowej jest rzędu od kilku promili do kilku procent, a same poprawki mają zupełnie inny rozkład niż ich newtonowskie odpowiedniki. Prędkość kątowa jest skomplikowaną funkcją zmiennych r i z i wyraża się jako suma $\Omega = \Omega_0 + c^{-2}(\Omega_{1,\text{geo}} + \Omega_{1,\text{dyn}} + \Omega_{1,\text{III}} + \Omega_{1,\text{IV}})$. Post-newtonowska poprawka do gęstości barionowej jest na podanych przykładach mniejsza od zera i obniża sumaryczną wartość gęstości barionowej $\varrho = \varrho_0 + c^{-2}\varrho_1$. Poprawka do potencjału grawitacyjnego jest z kolei dodatnia i przyczynia się do osłabienia pola grawitacyjnego któremu odpowiada potencjał grawitacyjny $U = U_0 + c^{-2}U_1$.

Zakończenie

Celem pracy była analiza osiowo symetrycznych, samograwitujących układów dyskowych rotujących w sposób keplerowski.

Pierwsza część pracy pokazała, że wbrew intuicyjnemu wyobrażeniu newtonowskie układy tego typu mogą istnieć nawet w przypadku gdy dysk jest bardzo ciężki, a potencjał grawitacyjny jest daleki od sferycznie symetrycznego potencjału masy centralnej. Okazuje się, że w takiej sytuacji rotacja keplerowska, rozumiana jako zależność prędkości kątowej od odległości od osi obrotu postaci $\Omega = \omega_0/r^{3/2}$ dla różnych stosunków M_d/M_c różni się współczynnikiem w liczniku, który odbiega od $\sqrt{GM_c}$ tym bardziej im większy jest wspomniany stosunek. Taki stan rzeczy został przewidziany na podstawie analitycznych rachunków i oszacowań, następnie potwierdzony numerycznymi symulacjami. Spośród rozważanych układów udało się wyodrębnić takie, dla których rotacja jest ściśle keplerowska, tj. $\omega_c \approx \sqrt{GM_c}$. Są to przypadki i) płynu testowego, ii) dysku z wewnętrznym brzegiem znajdującym się blisko masy punktowej, iii) cienkiego dysku o kształcie toroidu znajdującego się daleko od masy centralnej. We wszystkich tych przypadkach stała w prawie rotacji jest bliska tej w ściśle keplerowskiej formule. W pozostałych przypadkach różnica pomiędzy tymi współczynnikami jest możliwa do wyliczenia w rachunkach numerycznych, a współczynnik w prawie rotacji spełnia nierówność $\sqrt{GM_c} \leq \omega_c \leq \sqrt{G(M_c + M_d)}$. Pozwala to na określenie możliwego do popełnienia błędu w sytuacji w której na podstawie obserwowanej keplerowskiej krzywej rotacji szacuje się masę centralną przy założeniu ściśle keplerowskiej rotacji. Pozwala to również na wyselekcjonowanie pewnej klasy układów dla których takie oszacowanie nie ma sensu. Te rozważania doprowadziły do opracowania metody szacowania mas obiektów tego typu i na przykładzie AGN NGC4258 pokazane zostało jak ma wyglądać taka procedura, podkreślając jednocześnie, że wymagana jest tutaj znajomości geometrii układu.

Druga część pracy, to prezentacja analitycznego opisu oraz opracowanego narzędzia w postaci kodu numerycznego, które pozwala na wyznaczenie post-newtonowskich poprawek do parametrów opisujących model, takich jak gęstość, potencjał grawitacyjny, pole prędkości itd. Tak jak uprzednio, uwaga skupiona została na prędkości kątowej i jej post-newtonowskich poprawkach. Analityczne rachunki pokazały, że prędkość kątowa rozumiana jako suma części newtonowskiej i post-newtonowskiej poprawki wykazuje zupełnie inną naturę niż w modelu czysto newtonowskim. Poprawki 1PN wnoszą bezpośrednią zależność od odległości od płaszczyzny symetrii, co więcej, wchodząc do wspomnianej sumy z różnymi znakami z jednej strony znoszą się nawzajem zmniejszając sumaryczny efekt, z drugiej jednak wpływają na rotację w różnym stopniu i w zależności od sytuacji wyhamowują bądź przyspieszają materię dyskową w jej ruchu wokół osi z . Poza oczekiwanymi efektami będącymi spuścizną ogólnorelatywistycznych równań pola odkryty został zupełnie nowy efekt antywłeczenia układu współrzędnych. Warto podkreślić, że te nowe efekty są zaniedbywalne w reżimie gazu testowego

Rozdział 3 to wstęp do ogólnorelatywistycznego opisu keplerowskiej rotacji w Ogólnej Teorii Względności. Zaprezentowane zostały w nim pełne profile oraz równikowe przebiegi funkcji podstawowych parametrów opisujących model w cechowaniu innym niż w rozdziale 2. Taki stan rzeczy bierze się z niejednoznaczności rozwinięcia 1PN – funkcje $F_1(r)$ i $F_2(r)$ wprowadzone w

rozdziale 3 mogły zostać dowolnie wybrane. Niejednoznaczność ta jest usunięta przez warunek, że nieskończenie cienki, pyłowy dysk w czasoprzestrzeni Schwarzschilda spełnia dokładnie keplerowskie prawo rotacji $\Omega = \omega_0/r^{3/2}$ oraz równanie Bernoulliego. Warunek ten determinuje wspomniane funkcje. Rzuca to światło na koncepcyjne rozumienie pojęcia keplerowskiej rotacji poza intuicyjnym i dobrze rozumianym reżimem newtonowskim, stwarzając tym samym pole do analizy tego typu problemów w ramach ogólnorelatywistycznego modelu.

Model 1PN pokazał jak wyglądają post-newtonowskie poprawki i jaka jest ich skala oraz pozwolił na wypracowanie wyobrażenia o granicach stosowalności przybliżenia 1PN. Przede wszystkim jednak spełnił on swoją rolę jako krok pośredni pomiędzy klasyczną newtonowską teorią a Ogólną Teorią Względności wyznaczając dalsze kierunki badań.

Dodatek A

Dodatek ten zawiera szczegóły numerycznego rozwiązywania skalarnego równania Poissona postaci

$$\Delta U = f(r, z) \quad (3.12)$$

z warunkami brzegowymi

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow 0} U = 0. \quad (3.13)$$

Do przedstawienia poniższego rozumowania użyte zostały zmienne cylindryczne (r, ϕ, z) oraz sferyczne (R, θ, ϕ) . Przyjęte zostało również oznaczenie $\mu = \cos \theta$.

Podczas rachunków dla danej konfiguracji każdorazowo zachodzi potrzeba rozwiązania całej serii tego typu równań równań. Ze względu na założenia modelowe proces ten odbywa się w warunkach osiowej symetrii. Funkcje Greena dla trójwymiarowego operatora Laplace'a, dla rozwiązania znikającego w nieskończoności wyrażają się poprzez rozwinięcie

$$-\frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{R_{<}^j}{R_{>}^{j+1}} \left\{ P_j(\mu)P_j(\mu') + 2 \sum_{m=1}^j \frac{(j-m)!}{(j+m)!} P_j^m(\mu)P_j^m(\mu') \cos[m(\phi - \phi')] \right\}, \quad (3.14)$$

gdzie $R_{>(<)}$ oznacza większy (mniejszy) z promieni R i R' . Posługując się (3.14) można zapisać rozwiązanie (3.12) w postaci

$$U(R, \mu) = -\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} P_j(\mu) \left[\frac{1}{R^{j+1}} E_j(R) + R^j F_j(R) \right], \quad (3.15)$$

gdzie

$$E_j(R) = \int_0^R dR' R'^{j+2} \int_{-1}^1 d\mu' P_j(\mu') f(R', \mu') \quad (3.16)$$

oraz

$$F_j(R) = \int_R^{\infty} dR' \frac{1}{R'^{j-1}} \int_{-1}^1 d\mu' P_j(\mu') f(R', \mu'). \quad (3.17)$$

Należy zwrócić uwagę, że w przypadku gdy funkcja $f(R, \mu)$ posiada symetrię obiciową względem równika, całka zawierająca $P_{2j+1}(\mu)$ jest równa zero. W takiej sytuacji całkowanie odbywa się jedynie po zmiennej μ w granicach $0 \leq \mu \leq 1$. Numeryczna implementacja tego typu formuł dyskutowana jest w literaturze, między innymi w pracy [22].

Dodatek B

Dodatek ten zawiera szczegóły numerycznego rozwiązywania wektorowego równania typu Poissona postaci

$$\Delta \mathbf{A} = f(r, z) \mathbf{v}, \quad (3.18)$$

gdzie jedynymi nieznikającymi składowymi $\mathbf{A}$ i $\mathbf{v}$ są składowe azymutalne $A_\phi d\phi$ i $v_\phi d\phi$, ponadto $\partial_\phi A_\phi = \partial_\phi v_\phi = 0$.

Do przedstawienia poniższego rozumowania użyte zostały zmienne cylindryczne (r, ϕ, z) oraz sferyczne (R, θ, ϕ) . Przyjęte zostało również oznaczenie $\mu = \cos \theta$. Dla potrzeb poniższych rozważań wygodnie jest zapisać tożsamość $\Omega = v^\phi$, by móc wprowadzić kowariantny wektor $v_\phi = g_{\phi i} v^i = r^2 v^\phi = r^2 \Omega$.

Podczas rachunków dla danej konfiguracji każdorazowo zachodzi potrzeba rozwiązania całej serii tego typu równań równań. Ze względu na założenia modelowe proces ten odbywa się w warunkach sferycznej symetrii. Można pokazać, że zachodzą następujące związki

$$\Delta \left(\frac{\cos \phi A_\phi}{r} \right) = \frac{f(r, z) \cos \phi v_\phi}{r} \quad \text{lub} \quad \Delta \left(\frac{\sin \phi A_\phi}{r} \right) = \frac{f(r, z) \sin \phi v_\phi}{r}. \quad (3.19)$$

Równanie (3.18) w zmiennych cylindrycznych można zapisać jako

$$\Delta A_\phi - \frac{2\partial_r A_\phi}{r} = f(r, z) v_\phi.$$

Jest ono rozwiązywane poprzez rozwinięcia odpowiednich dla tego operatora funkcji Greena w wielomiany Legendre'a. Poszukuje się funkcji Greena dla operatora $\Delta - (2/r)\partial_r$. Wychodząc z (3.19) i wykorzystując (3.14) otrzymuje się

$$\begin{aligned} \frac{\cos \phi A_\phi(R, \mu)}{R\sqrt{1-\mu^2}} &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^\infty dR' R' \int_{-1}^1 \frac{d\mu'}{\sqrt{1-\mu'^2}} \int_0^{2\pi} d\phi' \cos \phi' f(R', \mu') v_\phi(R', \mu') \\ &\times \sum_{j=0}^\infty \frac{R_{<}^j}{R_{>}^{j+1}} \left\{ P_j(\mu) P_j(\mu') + 2 \sum_{m=1}^j \frac{(j-m)!}{(j+m)!} P_j^m(\mu) P_j^m(\mu') \cos[m(\phi - \phi')] \right\}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Całka

$$I = \int_0^{2\pi} d\phi' \cos \phi' \cos[m(\phi - \phi')] \quad (3.21)$$

dla $m = 1$ przyjmuje wartość $I = \pi \cos \phi$, natomiast dla $m \neq 1$ wyraża się przez

$$I = \frac{2m \sin(m\pi) \cos[m(\pi - \phi)]}{(m-1)(m+1)}. \quad (3.22)$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} \frac{\cos \phi A_\phi(R, \mu)}{R\sqrt{1-\mu^2}} &= -\frac{1}{2} \cos \phi \int_0^\infty dR' R' \int_{-1}^1 \frac{d\mu'}{\sqrt{1-\mu'^2}} f(R', \mu') v_\phi(R', \mu') \\ &\times \sum_{j=1}^\infty \frac{R_{<}^j}{R_{>}^{j+1}} \frac{1}{j(j+1)} P_j^1(\mu) P_j^1(\mu'). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Otrzymuje się zatem wyrażenie

$$A_\phi(R, \mu) = -\frac{1}{2} \sqrt{1-\mu^2} \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{j(j+1)} P_j^1(\mu) \left[\frac{1}{R^j} C_j(R) + R^{j+1} D_j(R) \right], \quad (3.24)$$

gdzie

$$C_j(R) = \int_0^R dR' R'^{j+1} \int_{-1}^1 \frac{d\mu'}{\sqrt{1-\mu'^2}} P_j^1(\mu') f(R', \mu') v_\phi(R', \mu') \quad (3.25)$$

oraz

$$D_j(R) = \int_R^\infty dR' \frac{1}{R'^j} \int_{-1}^1 \frac{d\mu'}{\sqrt{1-\mu'^2}} P_j^1(\mu') f(R', \mu') v_\phi(R', \mu'). \quad (3.26)$$

Ponadto $d\mu/\sqrt{1-\mu^2} = -d\theta$. Należy zwrócić uwagę, że

$$P_{2j}^1(\mu) = \sqrt{1-\mu^2} \frac{d}{d\mu} P_{2j}(\mu). \quad (3.27)$$

Pochodne $dP_{2j}(\mu)/d\mu$ są nieparzystymi funkcjami μ , z drugiej strony $f(R, \mu) v_\phi(R, \mu)$ są symetrycznymi funkcjami ze względu na zmienną z w wyniku czego P_{2j}^1 są równe zero.

Bibliografia

- [1] L.-D. Landau, J.-M. Lifszyc, *Hydrodynamika*, Warszawa, Polska (2009).
- [2] Miyoshi M., Moran J., Herrnstein J., Greenhill L., Nakai N., Diamond P., Makoto I., 1995, *Nature*, 373, 127
- [3] M. Hashimoto, Y. Eriguchi, E. Muller, *A&A*, 297, 135 (1995)
- [4] J.-M. Huré, F. Hersant, C. Surville, N. Nakai, T. Jacq, *A&A*, 530, 145 (2011)
- [5] P. Mach, E. Malec, and M. Piróg, *Acta Phys. Pol. B44*, 107 (2013).
- [6] I. D. Novikov and K. S. Thorne, *Black Holes* (Gordon and Breach, New York, 1973)
- [7] J. M. Bardeen and R. A. Wagoner, *Astrophys. J.* 158, L65 (1969)
- [8] V. Karas, J.-M. Huré, and O. Semerák, *Classical Quantum Gravity* 21, R1 (2004).
- [9] N. Stergioulas, *Living Reviews in Relativity* 6 (2003).
- [10] L. G. Fishbone and V. Moncrief, *Astrophys. J.* 207, 962 (1976).
- [11] S. Nishida and Y. Eriguchi, *Astrophys. J.* 427, 429 (1994).
- [12] S. Nishida, Y. Eriguchi, and A. Lanza, *Astrophys. J.* 401, 618 (1992).
- [13] P. Jaranowski, P. Mach, E. Malec, and M. Piróg, *Phys. Rev. D* 91, 024039 (2015)
- [14] L. Blanchet, T. Damour, and G. Schäfer, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 242, 289 (1990)
- [15] P. Jaranowski, P. Mach, E. Malec, and M. Piróg, *J. Phys.: Conf. Ser.* 600, 012011 (2015).
- [16] J.-L. Tassoul, *Stellar Rotation*, Cambridge University Press, Cambridge, UK (2007).
- [17] P. Mach, *MNRAS* 422, 772 (2012)
- [18] Blinnikov S.I., 1975, *Soviet Astron.*, 19, 151
- [19] Hachisu, I., 1986, *ApJS*, 61, 479
- [20] Ostriker J.P., J.W-K., 1968, *ApJ*, 151, 1075
- [21] Clement M.J., 1974, *ApJ*, 194, 709
- [22] Müller E., Steinmetz M., 1995, *Comput. Phys. Commun.* 89, 45
- [23] A.G. Axenov, S.I. Blinnikov, 1994, *A&A*, 290, 674 (1994)
- [24] P., Mach, E., Malec, and M., Piróg, *Acta Phys. Pol. B43*, 2141 (2012).
- [25] Braatz J., Greenhill L., Moran J., Wilson A., Herrnstein J., 1997, *Bulletin of the American Astronomical Society*, 29, 1374
- [26] Greenhill L.J., Moran J.M., Herrnstein J.R., 1997, *ApJ*, 481, L23
- [27] Greenhill L.J., Gwinn C.R., 1997, *ApSS*, 248, 261
- [28] Trotter A.S., Greenhill L.J., Moran J.M., Reid M.J., Irwin J.A., Lo K.-Y., 1998, *ApJ*, 495, 740
- [29] Yamauchi A., Nakai N., Sato N., Diamond Ph., 2004, *PASJ*, 56, 605
- [30] Kondratko P.T., Greenhill L.J., Moran J.M., 2005, *ApJ*, 618, 618
- [31] Ishihara Y., Nakai N., Iyomoto N., Makishima K., Diamond Ph., Hall P., 2001, *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 53, 215
- [32] Greenhill L.J., Kondratko P.T., Lovell J.E.J., Kuiper T.B.H., Moran J.M., Jauncey D.L., Baines G.P., 2003, *ApJ*, 582, L11
- [33] Siopis Ch., Gebhardt K., Lauer T. R., Kormendy J., Pinkney J., Richstone D., Faber S.M., Tremaine S., Aller M.C., Bender R., 2009, *ApJ*, 693, 946
- [34] Reynolds Ch.S., Nowak M.A., Markoff S., Tueller J., Wilms J., Young A.J., 2009, *ApJ*, 691, 1159
- [35] P. Jaranowski and G. Schäfer, *Phys. Rev. D* 87, 081503(R) (2013).
- [36] F. H. Seguin, *Astrophys. J.* 197, 745 (1975).
- [37] J. L. Friedman and N. Stergioulas, *Bull. of the Astron. Soc. of India* 39, 21 (2011).
- [38] T. Damour, P. Jaranowski and G. Schäfer, *Phys.Rev.* 62, 021501 (2000).

- [39] T. Damour, P. Jaranowski and G. Schäfer, Phys. Rev. 62, 044024 (2000).
- [40] R. H. Boyer and R. W. Lindquist, Phys. Lett. 20, 504 (1966).
- [41] P. Mach, E. Malec, arXiv:1501.04539 [gr-qc], 2015.
- [42] H. Komatsu, Y. Eriguchi, and I. Hachisu, Mon. Not. R. Astron. Soc. 237, 355 (1989).
- [43] S. Bonazzola and J. Schneider, Astrophys. J. 191, 273 (1974).
- [44] R. H. Boyer and R. W. Lindquist, Phys. Lett. 20, 504 (1966).