Autoreferat

22 marca 2019

1 Imię i Nazwisko,

Jakub Mielczarek

2 Posiadane dyplomy, stopnie naukowe/artystyczne - z podaniem nazwy, miejsca i roku ich uzyskania oraz tytułu rozprawy doktorskiej,

- Doktor nauk fizycznych w zakresie fizyki, Uniwersytet Jagielloński, 2012. Tytuł rozprawy: *Perturbations in loop quantum cosmology.* Promotor: prof. dr hab. Marek Szydłowski.
- Magister fizyki teoretycznej, Uniwersytet Jagielloński, 2008. Tytuł pracy: *Kosmologia pętlowo-strunowa.* Promotor: prof. dr hab. Jerzy Jurkiewicz.
- Magister astronomii, Uniwersytet Jagielloński, 2008. Tytuł pracy: *Produkcja fal grawitacyjnych w pętlowej kosmologii kwantowej.* Promotor: prof. dr hab. Marek Szydłowski.

3 Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych/artystycznych,

- **III 2018 - obecnie** Postdoc, Centre de Physique Théorique, Marsylia, Francja.
- **X 2015 - obecnie** Adiunkt, Zakład Teorii Układów Złożonych, Instytut Fizyki, Uniwersytet Jagielloński, Kraków, Polska.
- **XI 2014 - X 2015** Postdoc, Laboratoire de Physique Subatomique et de Cosmologie, Grenoble, Francja.
- **X 2012 - IX 2015** Asystent, Zakład Teorii Układów Złożonych, Instytut Fizyki, Uniwersytet Jagielloński, Kraków, Polska.

- **XII 2011 - IX 2015** Fizyk, Zakład Fizyki Teoretycznej, Departament Badań Podstawowych, Narodowe Centrum Badań Jądrowych, Warszawa, Polska.

4 Wskazanie osiągnięcia* wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. 2016 r. poz. 882 ze zm. w Dz. U. z 2016 r. poz. 1311.):

4.1 Tytuł osiągnięcia naukowego/artystycznego,

Nieliniowe Przestrzenie Fazowe i Grawitacja Kwantowa

4.2 Autor/autorzy, tytuł/tytuły publikacji, rok wydania, nazwa wydawnictwa, recenzenci wydawniczy,

[H1] J. Bilski, S. Brahma, A. Marcianó, J. Mielczarek, "Klein-Gordon field from the XXZ Heisenberg model," Int. J. of Mod. Phys. D, Vol. **28**, No. 1 (2019) 1950020.

[H2] J. Mielczarek, T. Trześniewski, "Towards the map of quantum gravity," Gen. Rel. Grav. **50** (2018) no.6, 68.

[H3] J. Mielczarek, T. Trześniewski, "Spectral dimension with deformed spacetime signature," Phys. Rev. D **96** (2017) no.2, 024012.

[H4] J. Mielczarek, "Spin-Field Correspondence," Universe **3** (2017) no.2, 29.

[H5] J. Mielczarek, T. Trześniewski, "Nonlinear Field Space Cosmology," Phys. Rev. D **96** (2017) no.4, 043522.

[H6] J. Mielczarek, T. Trześniewski, "The Nonlinear Field Space Theory," Phys. Lett. B **759** (2016) 424.

[H7] M. Bojowald, J. Mielczarek, "Some implications of signature-change in cosmological models of loop quantum gravity," JCAP **1508** (2015) no.08, 052.

[H8] J. Mielczarek, "Loop-deformed Poincaré algebra," EPL **108** (2014) 4, 40003.

[H9] J. Mielczarek, "Inflationary power spectra with quantum holonomy corrections," JCAP **1403** (2014) 048.

[H10] J. P. Gazeau, J. Mielczarek, W. Piechocki, "Quantum states of the bouncing universe," Phys. Rev. D **87** (2013) no.12, 123508.

4.3 Omówienie celu naukowego/artystycznego ww. pracy/prac i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania,

4.3.1 Wstęp

Zaadoptowanie do matematycznego opisu Natury pojęcia zakrzywionych przestrzeni okazało się niezwykle owocne, kształtując przez ostatnie stulecie dynamiczny rozwój fizyki teoretycznej. Przełomowym momentem było wprowadzenie przez Einsteina pojęcia zakrzywionej czasoprzestrzeni, jako opisu oddziaływań grawitacyjnych. Na tej podstawie, zrodziła się Ogólna Teoria Względności (OTW), która jest obowiązującą dzisiaj teorią opisującą oddziaływania grawitacyjne. Jej empiryczną zgodność potwierdzono od skal okołoziemskich [1], poprzez skale układu Słonecznego [2], skale galaktyczne [3], skale gromad galaktyk [4], aż po skale kosmologiczne [5]. Ogromnym osiągnięciem okazało się zaobserwowanie w ostatnich latach, jednego z najmniej uchwytnych przewidywań OTW - fal grawitacyjnych [6]. Jak dotąd, nie zanotowano odstępstw od przewidywań teorii względności. Oczywiście, obserwowane są pewne zjawiska które mogą być wynikiem modyfikacji OTW, takie jak obecność ciemnej energii lub ciemnej energii, jednakże obecne dane obserwacyjne nie wskazują jednoznacznie na konieczność wprowadzenia uogólnienia OTW, w celu ich wyjaśnienia.

Jedną z ważnych konsekwencji zakrzywienia czasoprzestrzeni jest to, iż objętość przestrzeni może być skończona. W szczególności, odpowiada temu, rozważany w kosmologii, model Friedmana-Robertsona-Walkera (FRW) z dodatnią krzywizną przestrzenną. W przypadku tym, część przestrzenna wszechświata opisywana jest przez 3-sferę $\mathbb{S}^3$, której objętość wynosi $V = 2\pi^2 a^3$, gdzie a to tak zwany czynnik skali. Chociaż dostępne obserwacje kosmologiczne nie są w stanie rozstrzygną tego czy trój-objętość Wszechświata jest skończona czy nie, rozważanie zwartych przestrzeni jest zasadne zarówno z przesłanek natury fizycznej jaki i filozoficznej. Założenie skończoności ma wymiar czysto praktyczny, upraszczając rozważania teoretyczne i ich interpretację. Ponadto, do hipotezy ograniczonej przestrzeni skłania nas intuicja opierająca się na doświadczeniu empirycznym, która wskazuje na skończoność wartości wielkości fizycznych, zaś pojęcie nieskończoności uważać zaś należy jedynie za wynik matematycznej idealizacji danego aspektu rzeczywistości. Max Born i Leopold Infeld nazwali to *Zasadą Skończoności* [7].

Nawet jednak gdy założymy, że przestrzeń jest skończona, Ogólna Teoria Względności wciąż dopuszcza nieskończoności innego typu. Na przykład, tempo zmiany czynnika skali może dążyć do nieskończoności lub też objętość przestrzenna, chociażby obecnie była skończona, może osiągnąć w przyszłości wartość nieskończoną. Zachowania takie znów możemy postrzegać jako niepożądane, gdyż muszą się one wiązać ze załamaniem opisu teoretycznego na którym się opieramy. Są to przykłady tak zwanych *osobliwości*, występujących w OTW. W sposób bezpośredni wiążą się one z faktem, iż wartość pola grawitacyjnego dąży w takich sytuacjach do nieskończoności. To zaś jest możliwe ponieważ Ogólna Teoria Względności nie narzuca ograniczeń na wartości jakie może przyjmować pole grawitacyjne. Zmienne skalarne

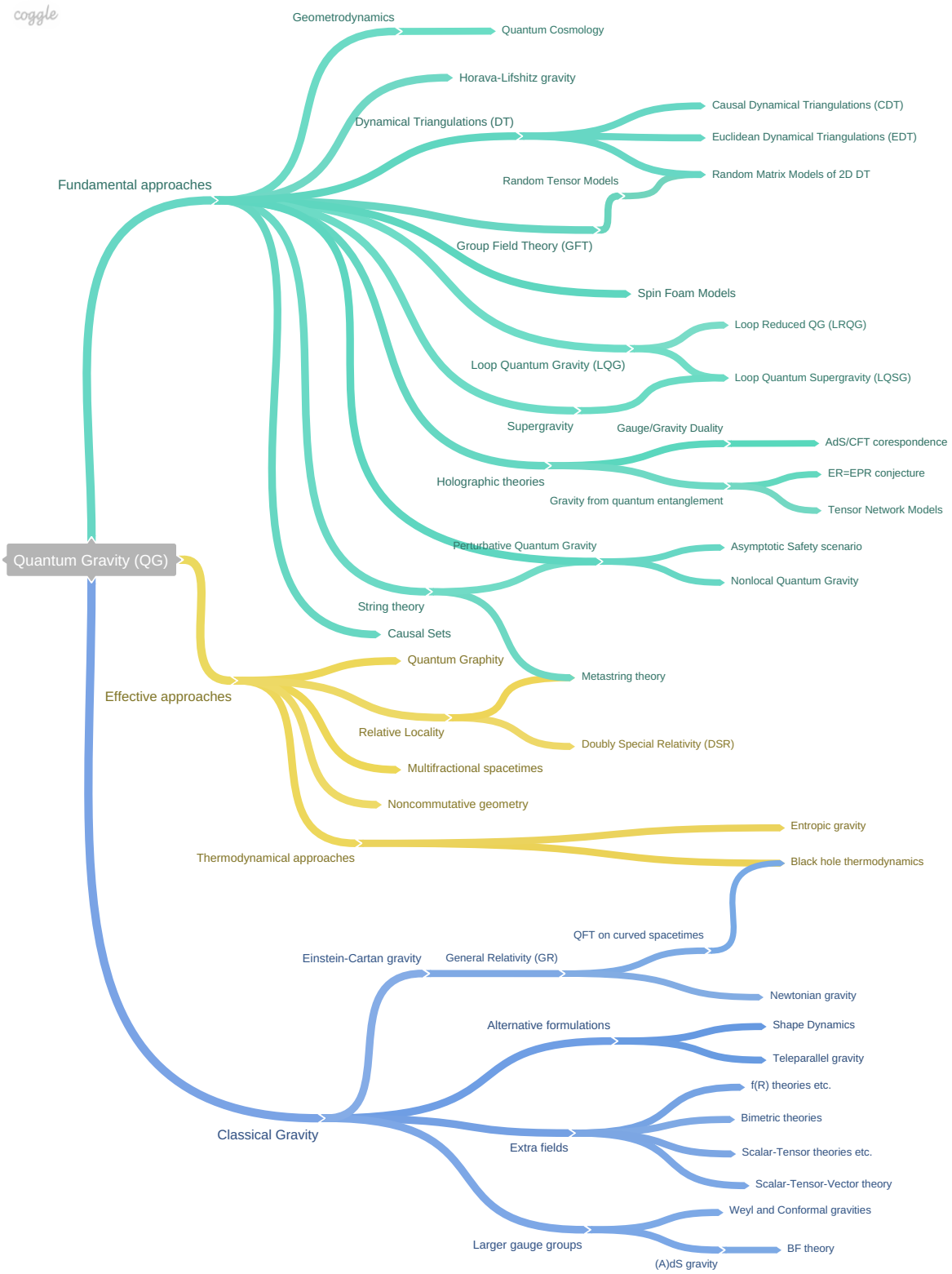
opisujące pole grawitacyjne (składowe metryki, krzywizna, ...) mogą być równe dowolnej liczbie rzeczywistej z przedziału od $-\infty$ do $+\infty$.

Problem osobliwości OTW jest znany od samego początki istnienia tej teorii i przez ostatnie 100 lat podejmowano niezliczone próby jego rozwiązania. Możemy wyróżnić dwa główne kierunki: pierwszy to modyfikacje OTW jako klasycznej teorii grawitacji, natomiast drugi to rozszerzenie ogólnej teorii względności do tak zwanej *kwantowej teorii grawitacji*. Ten drugi przypadek związany jest z pogodzeniem teorii oddziaływań grawitacyjnych z zasadami mechaniki kwantowej. Na rysunku 1, pochodzącym z pracy **[H2]**, przedstawiono główne podejścia reprezentujące oba z powyższych kierunków.

Nowym kierunkiem, stawiającym sobie za cel, miedzy innymi, rozwiązanie problemu osobliwości klasycznej teorii grawitacji jest *Teoria Nieliniowych Przestrzeni Pól* (ang. Nonlinear Field Space Theory - NFST) zaproponowana w pracy **[H6]** i rozwijana w publikacjach **[H1,H4,H5]**. Główną charakterystyką tego podejścia jest uogólnienie rozważanych w fizyce teoretycznej afinicznych *przestrzeni fazowych* pól do przypadku przestrzeni nieliniowych. Szczególnym przypadkiem takich przestrzeni są zaś przestrzenie zwarte. Zwartość przestrzeni pól wprowadza ograniczenie na możliwe wartości pól, co w sposób wręcz automatyczny zabezpiecza przed rozbieżnościami teorii, takimi jak osobliwości OTW. Ponadto, okazuje się, że już nawet częściowe uzwarcenie przestrzeni fazowej pozwala rozwiązać problem kosmologicznej osobliwości OTW. Sytuację taką spotykamy w pętlowej kosmologii kwantowej (ang. Loop Quantum Cosmology - LQC) [8, 9], opierającej się na metodach kwantowania grawitacyjnych stopni swobody rozwiniętych w ramach pętlowej grawitacji kwantowej (ang. Loop Quantum Gravity - LQG) [10]. W przypadku LQC, periodyfikacja przestrzeni fazowej w jednej ze zmiennych kanonicznych, prowadzi do nieosobliwej ewolucji kosmologicznej. Nieliniowość (w sensie globalnych własności) przestrzeni fazowej LQC prowadzi ponadto do szeregu innych przewidywań, takich jak deformacje symetrii czasoprzestrzennych. Zagadnienia te były przedmiotem badań dyskutowanych w artykułach **[H3,H7,H8,H9,H10]**.

Jak już wcześniej wspomniano, myślenie w kategoriach przestrzeni zakrzywionych odegrało ogromną rolę w całej współczesnej fizyce, nie tylko w kontekście grawitacji. Zakrzywienie to dotyczy zazwyczaj przestrzeni konfiguracyjnej danego układu bądź geometrii grupy (w sensie teorii grup) charakteryzującej konkretne oddziaływanie fizyczne. Dla przykładu, przestrzeń konfiguracyjną $\mathcal{C}$ swobodnej cząstki materialnej bez wewnętrznych stopni swobody stanowi trójwymiarowa (płaska) przestrzeń euklidesowa $\mathbb{R}^3$, tworzona przez wszystkie jej możliwe położenia. Jednakże, pełną informację o stanie cząstki daje nam dopiero punkt w *przestrzeni fazowej* Γ, która składa się nie tylko z przestrzeni konfiguracyjnej, ale i przestrzeni kanonicznie sprzężonych pędów. Z geometrycznego punktu widzenia, przestrzeń fazowa jest zazwyczaj tzw. wiązką kostyczną do przestrzeni konfiguracyjnej, $\Gamma = T^*(\mathcal{C})$. Oznacza to w szczególności, że nawet jeśli przestrzeń konfiguracyjna to przestrzeń zakrzywiona, to odpowiadająca jej przestrzeń pędów pozostaje nieograniczoną przestrzenią euklidesową [1]. Istnieją jednak również inne możliwości, czego przykład stanowi (zwarta) przestrzeń fa-

[1] Weźmy na przykład $q \in \mathcal{C} = \mathbb{S}^1$, dla której $\Gamma = T^*(\mathbb{S}^1) = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \ni (q, p)$.



Rysunek 1: Taksonaomia głównych podejść do kwantowej grawitacji i klasycznych modyfikacji ogólnej teorii względności **[H2]**.

zowa o topologii sfery $\Gamma = \mathbb{S}^2$, występująca jako opis przestrzeni fazowej momentu pędu lub spinu. Przypadek ten, jak również przestrzeń fazowa będąca wiązką kostyczną, wpisują się w

ogólną definicję przestrzeni fazowej jako *rozmaitości symplektycznej*, co zostanie dokładniej przedyskutowane w rozdziale 4.3.2.

Warto w tym miejscu podkreślić, że przestrzeń symplektycza wyjściowo nie jest wyposażona w metrykę która umożliwiłaby wprowadzenie pojęcia krzywizny bądź kątów (ważnych z punktu widzenia nieliniowości) na przestrzeni fazowej. Jednakże, każdą przestrzeń symplektyczną, czyli rozmaitość Γ ze stowarzyszoną formą symplektyczną ω, można zawsze wyposażyć w strukturę zespoloną, która jest mapą $I : T(\Gamma) \to T(\Gamma)$, spełniającą relację $I^2 = -1$, gdzie $T(\Gamma)$ jest wiązką styczną do rozmaitości Γ. Wykorzystując I, możemy skonstruować mapę $g(.,.) := \omega(., I(.)) : T(\Gamma) \times T(\Gamma) \to \mathbb{R}$ która jest metryką Riemanna. Rozważane tu trzy struktury (Γ, ω, I) tworzą tak zwany tzw. *compatible triple* [11]. Dysponowanie metryką g pozwala na wyciąganie konkluzji zarówno dotyczących nieliniowości jak i krzywizny przestrzeni fazowej. Przykład wyliczenia metryki dla sferycznej przestrzeni fazowej, wychodząc z formy symplektycznej ω oraz struktury zespolonej I, można znaleźć w załączniku do artykułu **[H6]**.

Prawdopodobnie za pierwszą sugestię, z której można wydedukować możliwe znaczenie zakrzywionych przestrzeni fazowych dla teorii grawitacji, można uważać rozważania opublikowane jeszcze w 1938-tym roku przez Maxa Borna [12]. W swojej pracy, proponuje on tak zwaną *zasadę wzajemności* (ang. Born reciprocity) która wyraża symetrię pomiędzy zmiennymi przestrzennymi a pędowymi. Mówiąc precyzyjniej, jest to symetria dla której transformacja $q \to p$ oraz $p \to -q$ (dla odpowiednio znormalizowanych zmiennych) pozostawia wielości fizyczne, takie jak energia, w niezmienionej postaci. W pracach dotyczących tej tematyki, Born zwraca uwagę na możliwe znaczenie powyższej symetrii w kontekście powiązania teorii względności z zasadami mechaniki kwantowej [13]. Wprowadza on również, między innymi, metrykę na przestrzeni pędów. Wymaga podkreślenia jednak, że chociaż zasada wzajemności jest koncepcją atrakcyjną na poziomie teoretycznych rozważań, nie jest ona zgodna z symetrią lorentzowską. Dlatego też, oryginalne koncepcje Borna nie znalazły szerokiego odzwierciedlenia w XX-to wiecznej fizyce. Z dzisiejszej perspektywy, opartej o podjęte w ostatnich dziesięcioleciach próby uchwycenia kwantowej natury oddziaływań grawitacyjnych, łamanie czy też deformacja symetrii lorentzowskiej staje się praktycznie typowym przykładem oczekiwanych efektów kwantowograwitacyjnych. Jak przedyskutujemy w rozdziałach 4.3.5 oraz 4.3.6, przykładu deformacji symetrii czasoprzestrzennych dostarcza przypadek cylindrycznej przestrzeni fazowej w LQC.

Kolejnym przykładem jest podejście do kwantowej grawitacji zwane *względną lokalnością* (Relative locality) [14]. W obecnym kształcie, Relative locality formułowana jest głownie dla przestrzeni fazowych cząstek, nie zaś pól. Opis cząstkowy wzbudzeń pola jest, jak wiadomo, możliwy tylko w określonym reżimie. Podejście to wymaga więc dalszego uogólnienia, w szczególności do opisu pól materii oraz oddziaływań, wliczając teorię oddziaływań grawitacyjnych ze zwartą przestrzenią fazową. Jednym z wyzwań programu badawczego NFST, jest rozszerzenie podejścia Relative locality do przypadku teorii pól. Kwestię tę dyskutujemy w podrozdziale 4.3.3, na przykładzie teorii pola skalanego.

Pole skalarne jest najprostszym typem pola, którego stan w dowolnym punkcie przestrzeni

opisywany jest przez dwie wielkości: wartość pola φ i jego (kanonicznie sprężonego) pędu π_φ. W standardowej teorii pola, dla każdego punktu wartości te należą do dwuwymiarowej przestrzeni fazowej $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, a więc mogą być dowolnie duże. W konsekwencji, gęstość energii pola może osiągać wartość większą niż skala energii Plancka, gdzie wiodącą rolę powinny odgrywać efekty grawitacji kwantowej. Wydaje się więc mieć sens przypuszczenie, że sytuacja taka wynika z przybliżonego charakteru dotychczasowych teorii i w rzeczywistości wartości wspomnianych wielkości fizycznych podlegają pewnym ograniczeniom. W szczególności, można oczekiwać górnej granicy gęstości energii pola grawitacyjnego na poziomie gęstości Plancka. Ponieważ osiągnięcia gęstości porównywalnych z gęstością Plancka spodziewamy się w bardzo wczesnej fazie ewolucji Wszechświata, właściwym miejscem do rozważania możliwych konsekwencji ograniczania wartości pól w skali Plancka jest kosmologia. Zagadnienie to jest dyskutowane w rozdziale 4.3.7.

4.3.2 Zwarte przestrzenie fazowe

W celu zobrazowania kluczowych koncepcji związanych z nieliniowymi przestrzeniami fazowymi przeanalizujmy przypadek zwartej dwuwymiarowej przestrzeni fazowej. Skoncentrujemy naszą uwagę na przykładzie dwuwymiarowej sfery $\mathbb{S}^2$, co będzie miało znaczenie dla dalszej dyskusji. Związane jest to mianowicie z faktem, iż sferyczna przestrzeń fazowa jest przestrzenią fazową momentu pędu i spinu. Przeprowadzona tu dyskusja będzie opierała się, w głównym stopniu, na wynikach pracy **[H4]**.

Ponieważ przestrzeń fazowa jest ogólnie *rozmaitością symplektyczną*, stowarzyszona musi zostać z zamkniętą formą symplektyczą ω. Zamkniętość formy symplektycznej gwarantuje spełnienie tożsamości Jacobiego, co ma znaczenie dla własności łączności. Naturalnym wyborem takiej formy dla sfery jest 2-forma powierzchni. Wykorzystując układ współrzędnych sferycznych, możemy rozważaną przestrzeń fazową sparametryzować poprzez kąty (ϕ, θ), tak, że 2-forma powierzchni może zostać wyrażona jako $\omega = S \sin\theta \, d\phi \wedge d\theta$. Stała S została tu wprowadzona ze względów wymiarowych, tak by wymiar formy symplektycznej pokrywał się z wymiarem powierzchni na dwuwymiarowej przestrzeni fazowej, czyli z wymiarem momentu pędu. Warto zaznaczyć, że z wyłączeniem biegunów sfery ($\theta = 0, \pi$), rozważana forma symplektyczna ω jest odwracalna, co pozwala wprowadzić tak zwany tensor Poissona $\mathcal{P}^{ij} = (\omega^{-1})^{ij}$. Wykorzystując tensor Poissona możliwe jest zdefiniowanie nawiasu Poissona $\{f, g\} = \mathcal{P}^{ij}(\partial_i f)(\partial_j g)$ i w konsekwencji równania Hamiltona $\frac{d}{dt} f = \{f, H\}$ dla dowolnej funkcji f zdefiniowanej na przestrzeni fazowej.

Kluczowe dla zrozumienia prezentowanych dalej wyników jest rozważanie następującej parametryzacji zmiennych kątowych na sferze:

$$\phi = \frac{q}{R_1} \in (-\pi, \pi], \tag{1}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{p}{R_2} \in [0, \pi], \tag{2}$$

gdzie q i p są nowymi zmiennymi. Natomiast, stałe R_1 i R_2 zostały wprowadzone z przyczyn wymiarowych, tak aby ilorazy $\frac{q}{R_1}$ oraz $\frac{p}{R_2}$ pozostały bezwymiarowe. Przechodząc do nowych

zmiennych, forma symplektyczna ω przyjmuje postać:

$$\omega = \cos(p/R_2) dp \wedge dq, \tag{3}$$

gdzie ustaliliśmy $R_1 R_2 = S$. Spełnienie tej równości gwarantuje nam, że w granicy $S \to \infty$, odzyskiwany jest (dla zmiennych p i q) przypadek przestrzeni fazowej $\mathbb{R}^2$ z formą symplektyczną w postaci Darboux: $\omega = dp \wedge dq$, a więc przypadek z płaską przestrzenią fazową $\Gamma = \mathbb{R}^2$.

Wykorzystując formę symplektyczą (3) otrzymujemy nawias Poissona w następującej postaci:

$$\{f, g\} = \frac{1}{\cos(p/R_2)} \left(\frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial q} \right). \tag{4}$$

Różnica z przypadkiem $\Gamma = \mathbb{R}^2$ polega na obecności czynnika $1/\cos\left(\frac{p}{R_2}\right)$. W konsekwencji, nawias Poissona pomiędzy zmiennymi kanonicznymi przyjmuje postać $\{q, p\} = 1/\cos\left(\frac{p}{R_2}\right)$. Warto tu podkreślić, że zmienne q oraz p są dobrze zdefiniowane na sferze jedynie lokalnie. Ich wartości nie zmieniają się na sferze w sposób ciągły. W szczególności, $q \in (-\pi R_1, \pi R_1]$, tak że w puncie $q = \pi R_1$ następuje nieciągłość. O ile nie ma to znaczenia w przypadku, kiedy rozważamy małe wartości q (w otoczeniu granicy liniowej), tak w przypadku analizy globalnych własności sferycznej przestrzeni fazowej zasadne jest wprowadzenie zmiennych, które zdefiniowane są w sposób globalny. Naturalnym wyborem takich zmiennych jest parametryzacja sfery w kartezjańskim układzie współrzędnych. Dowolny punkt na sferze może być więc wskazywany przez wektor $\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$ o składowych:

$$S_x := S \sin\theta \cos\phi = S \cos\left(\frac{p}{R_2}\right) \cos\left(\frac{q}{R_1}\right) = S\left(1 - \frac{p^2}{2R_2^2} - \frac{q^2}{2R_1^2} + \mathcal{O}(4)\right), \tag{5}$$

$$S_y := S \sin\theta \sin\phi = S \cos\left(\frac{p}{R_2}\right) \sin\left(\frac{q}{R_1}\right) = S\left(\frac{q}{R_1} + \mathcal{O}(3)\right), \tag{6}$$

$$S_z := S \cos\theta = S \sin\left(\frac{p}{R_2}\right) = S\left(\frac{p}{R_2} + \mathcal{O}(3)\right), \tag{7}$$

tak, że spełnione jest równanie sfery $S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = S^2 = const$. Wykorzystując nawias Poissona (4) można pokazać, że składowe (5)-(7) spełniają algebrę:

$$\{S_x, S_y\} = S_z, \quad \{S_z, S_x\} = S_y, \quad \{S_y, S_z\} = S_x. \tag{8}$$

Jest to tak zwana algebra $\mathfrak{so}(3)$ (lub równoważnie $\mathfrak{su}(2)$). Oznacza to, że składowe wektora $\vec{S}$ są generatorami obrotów, co jest konsekwencją symetrii sferycznej przestrzeni fazowej. Zgodnie więc z definicją, wektor $\vec{S}$, którego składowe spełniają powyższą algebrę, nazywamy momentem pędu (lub spinem). Fakt, iż sferyczna przestrzeń fazowa jest przestrzenią fazową momentu pędu ma daleko idące konsekwencje. W szczególności, obserwacja, że sferyczna przestrzeń fazowa (momentu pędu lub spinu) może być lokalnie opisywana przez płaską przestrzeń fazową z jednym stopniem swobody stała się podstawą do wprowadzenia przeze mnie w 2017-tym roku relacji o roboczej nazwie Korespondencji Spin-Pole (ang. Spin-Field Correspondence) **[H4]**. Korespondencja ta wiąże, w granicy dużego spinu ($S \to \infty$), znane

teorie pola, cechujące się płaskimi (afinicznymi) przestrzeniami fazowymi z układami spinowymi. W pracy **[H4]** przedyskutowano tę korespondencję na przypadku modelu XXX Heisenberga, pokazując relację z nierelatywistyczną teorią pola skalarnego. Natomiast w pracy **[H1]**, wykazano, że relatywistyczne pole skalarne Kleina-Gordona można otrzymać z łańcucha spinowego XX Heisenberga (model XXZ Heisenberga w granicy $\Delta \to 0$ parametru anizotropii). Wyniki te zostaną szczegółowo przedyskutowane w następnym rozdziale.

Posłużyliśmy się powyżej określeniem *spin*, które zarezerwowane jest do określenia wewnętrznego momentu pędu cząstek, bezpośrednio związanego z jego kwantową naturą i wyrażającego się w ułamkach ($n/2$, gdzie $n = 0, 1, 2, 3, \dots$) zredukowanej stałej Plancka $\hbar$. Jednakże, jak dotąd, nasze rozważania były skupione na analizie klasycznych przestrzeni fazowych, dla których wartość momentu pędu S pozostawała nieokreślona. Dla kompletności naszych rozważań, zakończymy więc naszą dyskusję zarysem analizy przypadku kwantowego. Mianowicie, w ujęciu kwantowym, stan układu nie jest opisywany przez punkt w przestrzeni fazowej lecz przez wektor w przestrzeni Hilberta (warto tu zaznaczyć, że w sformułowaniu mechaniki kwantowej na przestrzeni fazowej, stan kwantowy układu można związać z funkcją gęstości kwazi-prawdopodobieństwa (np. funkcją Wignera) określoną na przestrzeni fazowej). Wymiar przestrzeni Hilberta, czyli ilość liniowo niezależnych wektorów bazowych, wiąże się natomiast z powierzchnią przestrzeni fazowej. Mianowicie, zasada nieoznaczoności Heisenberga mówi nam, że iloczyn nieoznaczoności pomiarów q i p ograniczony jest (dla przypadku płaskiej przestrzeni fazowej) w następujący sposób:

$$\Delta q \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}. \tag{9}$$

Nie możemy dokładniej wyznaczyć więc klasycznego stanu stopnia swobody na płaszczyźnie fazowej niż jako powierzchni $\sim \hbar$. Do opisu układu, którego przestrzeń fazowa ma powierzchnię A potrzebujemy więc około $A/\hbar$ niezależnych liniowo wektorów w przestrzeni Hilberta. W przypadku płaskiej przestrzeni fazowej, z uwagi na nieskończoność powierzchni, przestrzeń Hilberta musi więc posiadać nieskończony wymiar. Jednakże, dla przypadku sfery $\Gamma = \mathbb{S}^2$, objętość (powierzchnia) przestrzeni fazowej jest równa:

$$A = \int_\Omega \omega = 4\pi S < \infty, \tag{10}$$

gdzie wykonano całkowanie po pełnym kącie bryłowym Ω. Wymiar przestrzeni Hilberta jest więc skończony i proporcjonalny do $\sim S/\hbar$. Ponieważ wymiar przestrzeni Hilberta jest liczbą naturalną, dozwolone są jedynie pewne wartości S, będące wielokrotnością stałej Plancka. Sama zwartość przestrzeni fazowej implikuje więc kwantowanie momentu pędu (spinu). Ponadto, warto w tymi miejscu przywołać metodę orbit Kirillova [15], która mówi nam, że jeśli przestrzeń fazowa jest orbitą grupy symetrii G, względem których rozważany układ mechaniczny pozostaje niezmienniczy, to odpowiadający mu układ kwantowy opisywany jest przez nieredukowalne reprezentacje grupy G. W rozważanym tu przypadku, grupą symetrii jest $G = SU(2)$, natomiast można pokazać, że $\mathbb{S}^2 = SU(2)/U(1)$, co dowidzi tego, że sfera $\mathbb{S}^2$ jest orbitą tej grupy. Stąd, analizując nieredukowalne reprezentacji grupy $SU(2)$ (lub stosując np. tak zwane kwantowanie geometryczne sfery) otrzymujemy, że wymiar przestrzeni

Hilberta dla spinu wyraża się jako $\dim H_s = 2s + 1$, gdzie $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$. Natomiast, powierzchnia przestrzeni fazowej wyraża się jako $4\pi S = 4\pi\hbar s$. Jeśli, na przykład, rozważymy spin elektronu, dla którego $s = 1/2$, odpowiadająca mu powierzchnia przestrzeni fazowej będzie równa $2\pi\hbar$.

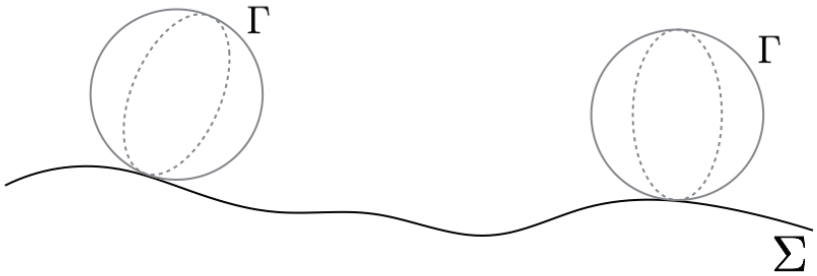
Zwiększając wartość liczby kwantowej spinu s wzrasta więc wartość powierzchni odpowiadającej mu przestrzeni fazowej. W przypadku algebry $\mathfrak{su}(2)$ możemy tak postępować aż do nieskończoności. Nie istnieje górne ograniczenie na wymiar nieredukowalnej reprezentacji grupy $SU(2)$ i w konsekwencji wartości powierzchni przestrzeni fazowej. Pewne rozważania fizyczne, na przykład w ramach kwantowej grawitacji [16, 17], sugerują jednak możliwość ograniczenia możliwych wartości spinu s poprzez wprowadzenie tak zwanych $\mathfrak{q}$-*deformacji*. Istnienie nietrywialnej $\mathfrak{q}$-deformacji algebry wprowadza ograniczenie na maksymalną dopuszczalną wartość powierzchni przestrzeni fazowej. Przykład wyłaniania się $\mathfrak{q}$-deformacji w ramach rozważań nad nieliniowymi przestrzeniami fazowymi przytoczymy w następnym rozdziale.

4.3.3 Teorie pola ze zwartymi przestrzeniami fazowymi

W poprzednim rozdziale, wprowadziliśmy pojęcie zwartej przestrzeni fazowej dla przypadku pojedynczego stopnia swobody. Zazwyczaj jednak, układy które rozważamy w fizyce teoretycznej charakteryzują się dużą, wręcz dążącą do nieskończoności, liczbą stopni swobody. Są to pola. Wykorzystywane do opisu zarówno cząstek elementarnych jak i oddziaływań podstawowych pola typowo cechują się afinicznością przestrzeni fazowych. Z tego powodu, wartości pól nie są w żaden sposób ograniczone na poziomie kinematycznym. Dla przykładu, wartość pola skalarnego φ może zmieniać się od $-\infty$ do $+\infty$. To samo dotyczy kanonicznie sprzężonego do φ pędu π_φ. Odstępstwo od tego stanowią przypadki teorii pól na sieci (zdefiniowane na dyskretnej czasoprzestrzeni) [18], nieliniowe modele σ [19, 20], jak również ich supersymetryczne uogólnienia [21], gdzie rozważana jest geometria riemannowska multipletu pól skalarnych. Z uwagi na zachowanie symetrii lorentzowkiej, nieafiniczność przestrzeni pól nie dotyczy w tych przypadkach pędów kanonicznych.

Afiniczne przestrzenie fazowe pól wyłaniają się w semiklasycznym opisie układów kwantowych, charakteryzowanych przez nieskończenie wymiarowe przestrzenie Hilberta. Jednakże, możemy spekulować, że nieskończony wymiar przestrzeni Hilberta wynika z przybliżonego (wyidealizowanego) opisu układu. Zwartość przestrzeni fazowych może zaś odzwierciedlać skończoną wymiarowość przestrzeni Hilberta, podobnie jak to miało miejsce w dyskutowanym wcześniej przypadku sferycznej przestrzeni fazowej $\Gamma = \mathbb{S}^2$. W rozdziale tym, uogólnimy te rozważania do przypadku pola skalarnego. Na rysunku 2 przedstawiono schematycznie przypadek pola skalarnego zdefiniowanego na rozmaitości Σ, cechującego się zwartością przestrzeni fazowej Γ w każdym punkcie tej rozmaitości.

Na początku 2016-tego roku, wraz z dr Tomaszem Trześniewskim, zaproponowaliśmy rozszerzenie standardowej teorii pola uwzględniające nieafiniczne, w szczególności zwarte, przestrzenie fazowe pól. Konstrukcja ta została roboczo nazwana Nonlinear Field Space



Rysunek 2: Graficzna reprezentacja zwartej przestrzeni fazowej pola skala dla dwóch punktów na rozmaitości przestrzennej Σ.

Theory (NFST) **[H6]**, czyli teorią nieliniowych przestrzeni pól. Wprowadzenie jej było motywowane m.in. próbą uogólnienia przywołanej we Wstępie zasady względnej lokalności do obszaru teorii pola, jako nowej drogi do kwantowej grawitacji. Chociaż w ramach NFST rozważa się nieafiniczne przestrzenie fazowe pól, a nie cząstek, to wstępne wyniki pokazują, że obserwowane w reżimie cząstkowym wzbudzenia pola można opisać w języku zakrzywionych przestrzeni pędów cząstek.

Szczegółowej analizie w ramach NFST poddano przypadek pola skalarnego ze sferyczną przestrzenią fazową dla każdego punktu przestrzeni położeń oraz, alternatywnie, dla każdego modu fourierowskiego. Poniżej, przedyskutujemy niezależnie te dwa przypadki.

a) Pole w przestrzeni fourierowskiej

W celu przejścia do reprezentacji fourierowskiej pola skalarnego φ, dokonajmy następującego rozkładu pola:

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \tilde{\varphi}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\,, \tag{11}$$

oraz analogicznie dla kanonicznie sprzężonego pędu $\pi(\mathbf{x}, t)$, którego mody fourierowskie będziemy oznaczać jako $\tilde{\pi}_{\mathbf{k}}(t)$. Dla wygody, wprowadziliśmy tutaj ograniczenie objętości przestrzeni do V. Pozwoli nam to dalej operować deltami Kroneckera nie zaś deltami Diraca. Nie będzie to jednak wpływać na wnioski fizyczne, a jedynie nieco uprości rozważania.

Ponieważ pola φ i π są rzeczywiste, ich składowe fourierowskie są wielkościami zespolonymi. Jednakże, dokonując transformacji kanonicznej:

$$\tilde{\varphi}_{\mathbf{k}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}\varphi_{\mathbf{k}} + e^{-i\frac{\pi}{4}}\varphi_{-\mathbf{k}}}{\sqrt{2}}\,, \quad \tilde{\pi}_{\mathbf{k}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}\pi_{\mathbf{k}} + e^{-i\frac{\pi}{4}}\pi_{-\mathbf{k}}}{\sqrt{2}}\,, \tag{12}$$

możemy wprowadzić rzeczywiste zmienne fourierowskie $\varphi_{\mathbf{k}}, \pi_{\mathbf{k}} \in \mathbb{R}$, tak że $\{\varphi_{\mathbf{k}}, \pi_{\mathbf{k}'}\} = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}$. Operowanie na rzeczywistych modach fourierowskich pozwala uprościć rozważania, eliminując konieczność pracy z polami zespolonymi.

Wykorzystując zmienne $\varphi_{\mathbf{k}}$ i $\pi_{\mathbf{k}}$, standardowy Hamiltonian dla bezmasowego pola skalar-

nego

$$H_\varphi = \int_V d^3x \left(\frac{\pi^2}{2} + \frac{1}{2}\delta^{ab}\partial_a\varphi\,\partial_b\varphi \right) , \tag{13}$$

przyjmuje postać sumy po *rzeczywistych* oscylatorach harmonicznych:

$$H_\varphi = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}} \left(\pi_{\mathbf{k}}^2 + k^2\varphi_{\mathbf{k}}^2\right) , \tag{14}$$

gdzie $k = \sqrt{\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}}$. Przestrzeń fazowa każdego z tych oscylatorów jest płaszczyzną $\mathbb{R}^2$.

Analogicznie do rozważań przeprowadzonych w rozdziale 4.3.2, dla każdego modu fourierowskiego możemy dokonać kompaktyfikacji przestrzeni fazowej z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{S}^2$. Wprowadzając podobną do rozważanej w rozdziale 4.3.2 parametryzację sferycznej przestrzeni fazowej:

$$(-\pi,\pi] \ni \phi = \frac{\varphi_{\mathbf{k}}}{R}\,, \quad \text{and} \quad [0,\pi] \ni \theta = \frac{\pi}{2} - \frac{R\pi_{\mathbf{k}}}{S}\,, \tag{15}$$

gdzie parametr R został użyty z przyczyn wymiarowych, otrzymujemy następujący nawias Poissona:

$$\{\varphi_{\mathbf{k}}, \pi_{\mathbf{k}'}\} = \sec\left(\frac{\pi_{\mathbf{k}}R}{S}\right)\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}\,. \tag{16}$$

Warto w tym miejscu podkreślić, że mody fourierowskie numerowane są wartością liczby falowej k. W ogólności więc, powierzchnia przestrzeni fazowej $4\pi S$ może być pewną funkcją tego parametru. W poniższych rozważaniach przyjmiemy jednak (nie dysponując żadnymi przesłankami odnośnie tego jaką taka zależność mogłaby mieć postać), że kompaktyfikacja przestrzeni fazowej przebiega w ten sam sposób dla każdego z modów. W konsekwencji, parametr S pozostanie niezależny od k.

Kolejnym krokiem jest zdefiniowanie dynamiki. Spełnione w tym celu muszą zostać dwa podstawowe warunki: (i) Hamiltonian powinien być funkcją globalnie określoną na przestrzeni fazowej, (ii) Hamiltonian musi redukować się do przypadku (14) w granicy płaskiej przestrzeni fazowej ($S \to \infty$). Jak pokazano w **[H6]**, umotywowanym fizycznym przypadkiem (momentu magnetycznego w stałym polu magnetycznym) spełniającym powyższe warunki jest:

$$H_\varphi^S = \sum_{\mathbf{k}} H_{\mathbf{k}}\,, \quad \text{gdzie} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} H_{\mathbf{k}} &:= -Sk\cos\left(\frac{\pi_{\mathbf{k}}}{\sqrt{Sk}}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{k}{S}}\varphi_{\mathbf{k}}\right) \\ &= -Sk + \frac{1}{2}\left(\pi_{\mathbf{k}}^2 + k^2\varphi_{\mathbf{k}}^2\right) - \frac{k}{4S}\varphi_{\mathbf{k}}^2\pi_{\mathbf{k}}^2 \\ &- \frac{1}{24Sk}\left(\pi_{\mathbf{k}}^4 + k^4\varphi_{\mathbf{k}}^4\right) + \mathcal{O}(S^{-2})\,, \end{aligned} \tag{18}$$

gdzie warunek (ii) wymusił związek $R = \sqrt{S/k}$.

Jak pokazano w **[H6]**, Hamiltonian (18) jest (przynajmniej do rzędu S^{-1}) diagonalizowalny za pomocą operatorów kreacji $\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$ i anihilacji $\hat{a}_{\mathbf{k}}$. Jednakże, z uwagi na zmodyfikowany nawias Poissona i w konsekwencji, zmodyfikowaną relację komutacji pól, algebra operatorów

kreacji i anihilacji podlega tak zwanej $\mathfrak{q}$-deformacji: $\hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}} - \mathfrak{q}\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}} = \hat{\mathbb{I}}$. Na tej podstawie, operatory pól możemy wyrazić jako:

$$\hat{\varphi}_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2k}}\frac{\left(\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}\right)}{\sqrt{1+\frac{\hbar}{2S}}}\,, \quad \hat{\pi}_{\mathbf{k}} = -i\sqrt{\frac{\hbar k}{2}}\frac{\left(\hat{a}_{\mathbf{k}} - \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}\right)}{\sqrt{1+\frac{\hbar}{2S}}} \tag{19}$$

oraz parametr $\mathfrak{q}$-deformacji:

$$\mathfrak{q} = \frac{1-\frac{\hbar}{2S}}{1+\frac{\hbar}{2S}} = 1 - \frac{\hbar}{S} + \mathcal{O}(S^{-2})\,, \tag{20}$$

tak, że w granicy afinicznej ($S \to \infty$) parametr deformacji dąży do $\mathfrak{q} = 1$.

Przestrzeń Hilberta rozważanego układu wyraża się jako $\mathcal{H} = \bigotimes_{\mathbf{k}} \mathcal{H}_{\mathbf{k}}$, gdzie $\mathcal{H}_{\mathbf{k}} = \operatorname{span}\{|0_{\mathbf{k}}\rangle, |1_{\mathbf{k}}\rangle, \ldots, |n_{\max,\mathbf{k}}\rangle\}$. Działanie operatorów $\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}$ i $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ na stany bazowe $|n_{\mathbf{k}}\rangle$ dane jest w następujący sposób:

$$\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}|n\rangle = \sqrt{\frac{1-\mathfrak{q}^{n+1}}{1-\mathfrak{q}}}|n+1\rangle\,, \quad \hat{a}_{\mathbf{k}}|n\rangle = \sqrt{\frac{1-\mathfrak{q}^{n}}{1-\mathfrak{q}}}|n-1\rangle\,,$$

co pozwala wyprowadzić $\mathfrak{q}$-zdeformowane wyrażenie na operator liczby obsadzeń:

$$\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}}|n_{\mathbf{k}}\rangle = \frac{1-\mathfrak{q}^{n}}{1-\mathfrak{q}}|n_{\mathbf{k}}\rangle. \tag{21}$$

Na tej podstawie, przeprowadzona w **[H6]** analiza perturbacyjna diagonalizacji kwantowej wersji Hamiltonianu (18) pozwala m.in. na wyciągnięcie wniosków odnośnie dwupunktowej funkcji korelacji. Mianowicie, korelator próżniowy dla pola φ przyjmuje postać:

$$\begin{aligned}\langle 0|\hat{\varphi}(\mathbf{x},t)\hat{\varphi}(\mathbf{y},t')|0\rangle &= \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k},n}|c_n|^2 e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})-i\Delta E_n(t-t')} \\ &= \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}}\int\frac{d\omega}{2\pi}D_{(\omega,\mathbf{k})}e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})-i\omega(t-t')}\,,\end{aligned}$$

gdzie (dla danej liczby falowej) $\Delta E_n = E_n^{(1)} - E_0^{(1)}$ oraz, oznaczając $p^2 = -\omega^2 + k^2$, otrzymujemy propagator:

$$\begin{aligned}D_{(\omega,\mathbf{k})} &= \sum_n \frac{2i\Delta E_n|c_n|^2}{p^2 + \Delta E_n^2 - k^2 - i\epsilon} \\ &= \frac{i\left(1-\frac{2}{S}\right)}{-\omega^2 + k^2\left(1-\frac{3}{S}\right) + i\epsilon} + \mathcal{O}(S^{-2}) \\ &= \frac{i}{-\omega^2+k^2} + \frac{i}{S}\frac{k^2+2\omega^2}{(-\omega^2+k^2)^2} + \mathcal{O}(S^{-2})\,,\end{aligned} \tag{22}$$

gdzie przyjęliśmy $c = 1$ oraz $\hbar = 1$. Jak możemy zauważyć, nieliniowość przestrzeni fazowej prowadzi do modyfikacji struktury biegunów propagatora. W konsekwencji, zmianie ulega relacja dyspersji dla wzbudzeń pola. Jednakże, ponieważ ΔE_n pozostaje liniowe w funkcji k w każdym rzędzie rozwinięcia w S^{-1}, relacja dyspersji nie zmieni swojego liniowego charakteru.

To co ulegnie zmianie to prędkość propagacji do "zrenormalizowanej" wartości $c_{\text{ren}} = 1 - \frac{3}{2}\frac{\hbar}{S} + \mathcal{O}(S^{-2})$. Sytuacja teka uległaby zmianie jeśli dopuścilibyśmy istnienie nietrywialnej zależności pomiędzy S a k, która wprowadziłaby zależność fizyki od skali energii.

Ponadto, propagator (22) może zostać wykorzystany do obliczenia potencjału oddziaływania pomiędzy dwoma punktowymi źródłami pola φ:

$$V(r) = 4\pi i \int \frac{d^3k}{(2\pi\hbar)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} D_{(0,\mathbf{k})} Q_0 = -\frac{Q_0}{r}\left(1 + \frac{\hbar}{S} + \mathcal{O}(S^{-2})\right), \tag{23}$$

gdzie Q_0 to ładunek stowarzyszony ze źródłem pola. Warto tu zauważyć, że z uwagi na przyjętą tu niezależność S od k, potencjał $V(r)$ zachowuje swoje relatywistyczne skalowanie. Efekt nieliniowości możemy zaś zaabsorbować do "zrenormalizowanego" ładunku $Q_{\text{ren}} = Q_0\left(1 + \frac{\hbar}{S} + \mathcal{O}(S^{-2})\right)$.

W artykule **[H6]** wskazano pewne możliwości empirycznej weryfikacji wyprowadzonych przewidywań, w szczególności w obszarze kosmologii. Do zagadnienia tego wrócimy w rozdziale 4.3.7.

b) Model XYZ Heisenberga

Wybór sferycznej przestrzeni fazowej prowadzi do nowej relacji między teoriami pola a układami spinowymi, którą w pracy **[H4]** określono roboczo mianem *korespondencji spin-pole* (Spin-Field Correspondence (SFC)). Korespondencja ta pozwala traktować standardowe teorie pola jako graniczny przypadek układów spinowych (o ciągłym rozkładzie w przestrzeni) z odpowiednio dobraną postacią oddziaływania między poszczególnymi spinami. Przejście takie wymaga ponadto przeprowadzenia granicy dużego spinu, $S \to \infty$, co jest równoważne z przejściem do afinicznej przestrzeni fazowej. W szczególności, w artykule **[H4]** pokazano, że model XXX Heisenberga sprzęgnięty do zewnętrznego pola magnetycznego, prowadzi do nierelatywistycznej teorii pola skalarnego, spełniającej zasadę wzajemności Borna [13]. Natomiast, rozważając w **[H1]** model XXZ Heisenberga (sprzężony do zewnętrznego pola magnetycznego) otrzymano, w granicy dużego spinu, relatywistyczne pole skalarne Kleina-Gordona. Przejście to wymaga rozważenia parametru anizotropii oddziaływania w granicy $\Delta \to 0$ (tzw. model XX). Natomiast, w przypadku $\Delta \to 1$ otrzymywany jest model XXX Heisenberga.

Podążając za **[H1]** przeanalizujmy najpierw ogólniejszy przypadek modelu XYZ Heisenberga, po czym dokonamy jego odpowiednich redukcji do przypadków: XXZ, XX i XXX. Model XYZ Heisenberga uogólnia dyskretny model Heisenberga w taki sposób, że sprzężenia pomiędzy składowymi spinów mogą być w ogólności różne:

$$H = -\sum_{i,j} \vec{S}'_i \cdot \vec{S}_j - \mu \sum_i \vec{B} \cdot \vec{S}_i, \tag{24}$$

gdzie $\vec{S}' = \{J_x S_x, J_y S_y, J_z S_z\}$. Parametry J_x, J_y, J_z są stałymi sprzężenia pomiędzy składowymi spinów, natomiast μ jest stałą sprzężenia spinu z polem magnetycznym $\vec{B}$. Pierwsza suma przebiega po najbliższych sąsiadach.

W granicy ciągłej, Hamiltonian (24) przyjmuje postać

$$H = \int d^3x\, \mathcal{H} = \int d^3x \left[(\nabla \vec{S}') \cdot (\nabla \vec{S}) - \tilde{\mu}\, \vec{B} \cdot \vec{S} \right], \tag{25}$$

gdzie $\vec{S}' = \{\tilde{J}_x S_x, \tilde{J}_y S_y, \tilde{J}_z S_z\}$, natomiast $\tilde{J}_x$, $\tilde{J}_y$, $\tilde{J}_z$ i $\tilde{\mu}$ są stałymi sprzężenia dla przypadku ciągłego. Stosując relacje (5)-(7) do (25) oraz rozwijając względem π_φ/R_2 i φ/R_1, otrzymujemy wyrażenia na składowe gęstości hamiltonianu $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{int}$, gdzie część swobodna:

$$\mathcal{H}_0 = -SM - \sqrt{S}\left(\tilde{\mu} B_y \sqrt{M}\varphi + \frac{\tilde{\mu} B_z}{\sqrt{M}}\pi_\varphi\right) + \frac{\pi_\varphi^2}{2} + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + \frac{1}{2}M^2\varphi^2 + S\frac{\tilde{J}_z}{2M}(\nabla\pi_\varphi)^2, \tag{26}$$

natomiast część oddziaływania wyraża się jako:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{int} = \frac{1}{SM}\Bigg[&\sqrt{S}\left(\frac{1}{2}\tilde{\mu} B_y \sqrt{M}\varphi\pi_\varphi^2 + \frac{1}{6}\tilde{\mu} B_y M^{\frac{3}{2}}\varphi^3 + \frac{\tilde{\mu} B_z}{6\sqrt{M}}\pi_\varphi^3\right) \\ &- \frac{1}{24}\pi_\varphi^4 - \frac{M^4}{24}\varphi^4 - \frac{M^2}{4}\varphi^2\pi_\varphi^2 + \left(\tilde{J}_x SM - 1\right)\left(2\varphi\pi_\varphi(\nabla\varphi)(\nabla\pi_\varphi) + \varphi^2(\nabla\varphi)^2\right) \\ &+ \frac{(\tilde{J}_x - \tilde{J}_z)S}{M}\pi_\varphi^2(\nabla\pi_\varphi)^2 - \pi_\varphi^2(\nabla\varphi)^2\Bigg] + \mathcal{O}(6).\end{aligned} \tag{27}$$

W celu otrzymania dla członu kwadratowego normalizacji identycznej ze standardowo rozważaną w przypadku pola Kleina-Gordona przyjęto: $R_1 = \sqrt{\frac{S}{M}}$, $\tilde{J}_y = \frac{1}{SM}$ oraz $\tilde{\mu} B_x = M$. Eliminacja członu liniowego w $\mathcal{H}_0$, wymaga zaś przyjęcia $B_y = 0 = B_z$. Ponadto, dalej przyjmiemy $\tilde{J}_x = \tilde{J}_y = \tilde{J}$ oraz $\tilde{J}_z = \Delta\tilde{J}$, gdzie Δ jest bezwymiarowym parametrem. Taki wybór parametrów $\tilde{J}_i$ redukuje model XYZ do modelu XXZ. W tym przypadku, oddziaływanie pomiędzy składowymi spinów jest równe w płaszczyźnie $x - y$, natomiast asymetria stałej sprzężenia w kierunku z jest parametryzowana przez stałą Δ. Jak widać, analizując swobodną część hamiltonianu (26), parametr Δ obecny jest we wkładzie $\frac{\Delta}{2M^2}(\nabla\pi_\varphi)^2$, nieobecnym w przypadku relatywistycznym. Ponadto, obecny stały czynnik $-SM$ przesuwa całkowitą energię, co nie ma znaczenia dla rozważań na gruncie klasycznym.

Dla rozpatrywanego tu przypadku teorii pola, nawias Poissona (4) należy uogólnić do:

$$\{f(\vec{x}), g(\vec{y})\} = \int \frac{d^3z}{\cos(\pi_\varphi(\vec{z})/R_2)}\left(\frac{\delta f(\vec{x})}{\delta\varphi(\vec{z})}\frac{\delta g(\vec{y})}{\delta\pi_\varphi(\vec{z})} - \frac{\delta f(\vec{x})}{\delta\pi_\varphi(\vec{z})}\frac{\delta g(\vec{y})}{\delta\varphi(\vec{z})}\right), \tag{28}$$

korzystając z którego oraz uwzględniając jedynie swobodną część gęstości hamiltonianu (26), możemy wyprowadzić równania ruchu dla zmiennych kanonicznych:

$$\dot{\varphi} = \pi_\varphi - \frac{\Delta}{M^2}\nabla^2\pi_\varphi, \tag{29}$$

$$\dot{\pi}_\varphi = -M^2\varphi + \nabla^2\varphi, \tag{30}$$

które prowadzą do zmodyfikowanej postaci równania Kleina-Gordona:

$$\ddot{\varphi} - (1+\Delta)\,\nabla^2\varphi + M^2\varphi + \frac{\Delta}{M^2}\nabla^4\varphi = 0. \tag{31}$$

Przypadek relatywistyczny jest odzyskiwany dla $\Delta \to 0$ (model XX Heisenberga). Dokonując transformaty Fouriera równania (31) możemy wyprowadzić relację dyspersji w następującej postaci:

$$E^2 = (1+\Delta)\, p^2 + M^2 + \Delta \frac{p^4}{M^2} = (p^2 + M^2)\left(1 + \Delta \frac{p^2}{M^2}\right). \tag{32}$$

Jednym z ważnych wyników pracy **[H1]** było przeprowadzenie systematycznej analizy deformacji symetrii lorentzowskiej związanej z powyższą relacją dyspersji. Poprzez zbadanie algebry Hopfa, przeanalizowana została również kwestia stanów wielocząstkowych. Jak pokazano, związana ze zmodyfikowaną relacją dyspersji (32) postać algebry Heisenberga posiada postać podobną do tej rozważanej w przypadku (wprowadzanej w kontekście kwantowej grawitacji) czasoprzestrzeni $\kappa-$Minkowskiego [22, 23].

Ponadto, wykorzystując relację dyspersji (32), możemy wyprowadzić wyrażenie na prędkość grupową:

$$v_{gr} := \frac{\partial E}{\partial p} = \frac{p}{E}\left[1 + \Delta\left(1 + \frac{p^2}{M^2}\right)\right], \tag{33}$$

co, łącznie z wyrażeniem na prędkość fazową $v_{ph} := \frac{E}{p}$, prowadzi do relacji:

$$v_{gr} v_{ph} = 1 + \Delta\left(1 + \frac{p^2}{M^2}\right). \tag{34}$$

powyższe wyrażenie przyjmuje wartości większe niż jeden dla $\Delta > 0$, wartości mniejsze niż jeden dla $\Delta < 0$. Natomiast dla $\Delta = 0$ odzyskiwany jest standardowy przypadek dla płaskich przestrzeni fazowych: $v_{gr} v_{ph} = 1$.

Na koniec tego rozdziału, przedyskutujmy dokładniej trzy szczególne przypadki:

- $\Delta = 1$ (model XXX) - w tym przypadku, relacja dyspersji redukuje się do postaci $E = M + \frac{p^2}{M}$. Relacja ta pokrywa się z przewidywaniami dla fal spinowych w modelu XXX. Przypadek ten odpowiada nierelatywistycznej teorii pola skalarnego, szczegółowo dyskutowanej w **[H4]**. Warte podkreślenia jest, że w granicy $S \to \infty$ model ten jest symetryczny względem, wprowadzonej przez Maxa Borna, *transformacji wzajemności*:

$$\varphi \to \frac{\pi_\varphi}{M}, \tag{35}$$

$$\pi_\varphi \to -\varphi M. \tag{36}$$

  Obiektami niezmienniczymi pod działaniem tej symetrii jest zarówno swobodny hamiltonian $\mathcal{H}_0\left[\varphi \to \frac{\pi_\varphi}{M}, \pi_\varphi \to -\varphi M\right] = \mathcal{H}_0\left[\varphi, \pi_\varphi\right]$ jak i nawias Poissona

$$\left\{\varphi \to \frac{\pi_\varphi}{M}, \pi_\varphi \to -\varphi M\right\} = \{\varphi, \pi_\varphi\}. \tag{37}$$

- $\Delta = 0$ (model XX) - dla tego przypadku $E^2 = M^2 + p^2$, co odpowiada relatywistycznej teorii pola skalarnego Kleina-Gordona.

- $\Delta = -1$ - dla tego przypadku $E^2 = M^2 - \frac{p^4}{M^2}$, co odpowiada modelowi spinowemu z niestabilnym punktem stałym.

4.3.4 Pętlowa kosmologia kwantowa

Zwartość przestrzeni fazowych dla przypadku teorii pola możne przyjąć za inspirację do poszukiwań kwantowej teorii oddziaływań grawitacyjnych. Okazuje się, że częściowe zakrzywienie przestrzeni fazowej pojawia się już w obecnie rozważanych teoriach kwantowej grawitacji. Dotyczy to, w szczególności, pętlowej grawitacji kwantowej (ang. loop quantum gravity - LQG) oraz, wykorzystującej metody LQG, tak zwanej pętlowej kosmologii kwantowej (ang. loop quantum cosmology - LQC). W LQC, częściowe uzwarcenie przestrzeni fazowej wynika z zastosowania procedury *polimeryzacji*, której dydaktyczny zarys oraz wynikające z niej (badane przeze mnie) efekty przedyskutujemy w niniejszym rozdziale.

Warto w tym miejscu podkreślić, że badaniom pętlowej kosmologii kwantowej i konsekwencjom polimeryzacji pędu w kosmologii poświęciłem znaczną część swojej dotychczasowej aktywności naukowej. Dotyczy to zarówno okresu studiów magisterskich i studiów doktoranckich oraz okresu po doktoracie. Podsumowanie otrzymanych przeze mnie w tym obszarze wyników, nie wchodzących do osiągnięcia habilitacyjnego, można znaleźć w rozdziale 5. W tym rozdziale, przytoczę zaś rezultaty wybranych do osiągnięcia habilitacyjnego publikacji **[H9]** i **[H10]**, jako przykład dyskusji konsekwencji cylindrycznej przestrzeni fazowej w kosmologii. Artykuł **[H10]** dyskutuje kwestię stanów kwantowych dla modelu jednorodnego FRW z cylindryczną przestrzenią fazową, natomiast w pracy **[H9]** badane są konsekwencje cylindryczności przestrzeni fazowej w kontekście pierwotnych zaburzeń kosmologicznych i ustalania warunków brzegowych/początkowych.

W polimerowej mechanice kwantowej [24], przestrzeń Hilberta jest wprowadzona przy założeniu dyskretyzacji jednej ze zmiennych kanonicznych, np. q. Możemy w szczególności przyjąć, że dopuszczalne są wartości q należące do zbioru $\Gamma = \{q_i\} \subset \mathbb{R}$. Zbiór Γ można uznać za przykład grafu w jednym wymiarze, co jest uproszczoną postacią sieci spinowej, wykorzystywanej w LQG. Dla równo rozłożonych punktów mamy $q_i = i\lambda + \epsilon$, gdzie ϵ rozróżnia różne równoważne reprezentacje. W oparciu o stany $|q_i\rangle$ możemy wprowadzić przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}_{\text{poly}} = \text{span}\{|i\lambda + \epsilon\rangle\}$. Operator pędu $\hat{p}$ (generator translacji) nie jest dobrze określony w przestrzeni $\mathcal{H}_{\text{poly}}$, gdyż jego działanie wyprowadza poza tę przestrzeń. Jednakże, już działanie operatora $\hat{U}_\lambda = \widehat{e^{i\lambda p}}$ jest dobrze zdefiniowane. Jest to mianowicie translacja pomiędzy sąsiadującymi w zbiorze Γ punktami.

W konsekwencji, w polimerowej mechanice kwantowej należy wprowadzić nową definicję operatora pędu, tak by w granicy $\lambda \to 0$ pokrywała się ona z tą rozważaną w przypadku standardowym. Najprostszym przypadkiem takiego operatora jest:

$$\hat{\pi}_\varphi \to \frac{\hat{U}_\lambda - \hat{U}_\lambda^\dagger}{2i\lambda} = \frac{\widehat{\sin(p\lambda)}}{\lambda}, \tag{38}$$

którego działanie na przestrzeni $\mathcal{H}_{\text{poly}}$ jest dobrze określone. Na poziomie semiklasycznym, mówimy o tak zwanych poprawkach od holonomii (ang. holonomy corrections) lub polimeryzacji, wprowadzonych poprzez zamianę:

$$p \to p_\lambda := \frac{\sin(p\lambda)}{\lambda}. \tag{39}$$

Uogólnienie zmiennej p do funkcji sinus, wiąże się z przeprowadzeniem na poziomie kinematycznym periodyfikacji części pędowej. Mianowicie, wyjściowa przestrzeń fazowa $\Gamma = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (q, p)$ podlega deformacji do $\Gamma_{\text{poly}} = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \ni (q, p)$, tak, że nowy pęd p_λ jest globalnie określony (w sposób ciągły) na okręgu [25].

Dla przejrzystości, sparametryzujmy przestrzeń fazową grawitacyjnej części przestrzeni fazowej modelu FRW z zerową krzywizną przez zmienne kanoniczne q i p, tak, że $q = V_0 a^3$. Wprowadzona wielkość V_0 jest objętością, do której zawężamy całkowanie po części przestrzennej. Jest to zabieg konieczny w płaskich modelach kosmologicznych. Pęd kanonicznie sprzężony do q można dobrać tak, że forma symplektyczna przyjmuje postać $\omega = dp \wedge dq$, natomiast Hamiltonian

$$H_{\text{GR}} = Nq\left(-\frac{3}{4}\kappa p^2 + \rho\right), \tag{40}$$

gdzie ρ jest gęstością energii pól materii a $\kappa := 8\pi G$.

Zastosowanie procedury polimeryzacji pędu (39) pozwala pozostawić formę symplektyczną w niezmienionej postaci, natomiast hamiltonian (40) ulega deformacji do:

$$H_{\text{poly}} = Nq\left(-\frac{3}{4}\kappa\frac{\sin^2(p\lambda)}{\lambda^2} + \rho\right). \tag{41}$$

Rozpatrując równania Hamiltona dla zmiennej q, wykorzystując wiąz hamiltonowski $\frac{\partial H_{\text{poly}}}{\partial N} = 0$, jak również definicję parametru Hubble'a

$$H := \frac{1}{3}\frac{\dot{q}}{q}, \tag{42}$$

możemy wyprowadzić zmodyfikowane równanie Friedmanna (dla $N = 1$):

$$H^2 = \frac{\kappa}{3}\rho\left(1 - \frac{\rho}{\rho_c}\right), \tag{43}$$

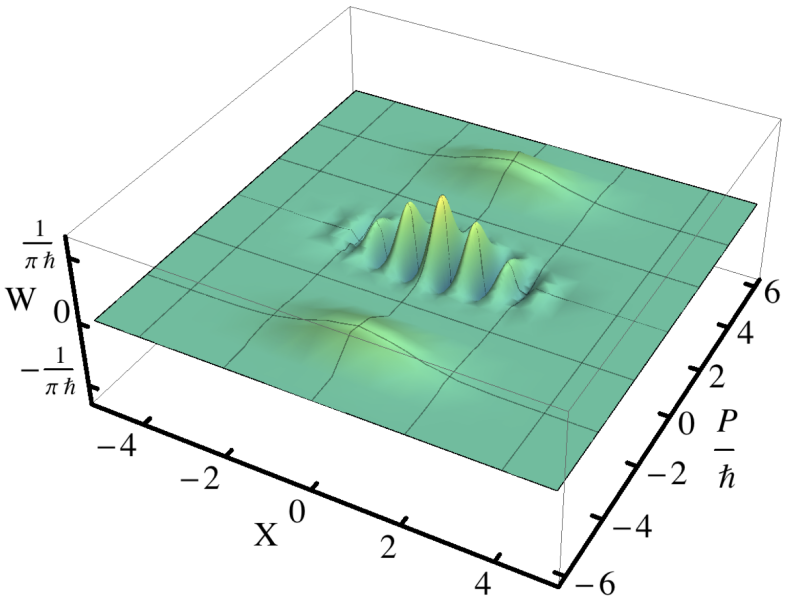
gdzie maksymalna dopuszczalna gęstość energii pól materii wynosi

$$\rho_c := \frac{3}{4}\frac{\kappa}{\lambda^2}. \tag{44}$$

Równanie (43) prowadzi do tak zwanej epoki odbicia (ang. bounce), która była przedmiotem intensywnych badań w przeciągu ostatnich około 15-tu lat. Podsumowania otrzymanych wyników można znaleźć np. w artykułach przeglądowych [8, 9].

W pracy **[H10]** przeanalizowano analizę kwantowej wersji wprowadzonego tu model, rozwiązując wiąz oraz wprowadzając tak zwany Hamiltonian fizyczny, stosując metodę zredukowanej przestrzeni fazowej. Rozważania przeprowadzono dla modelu ze swobodnym polem skalarnym. Przeanalizowano szereg możliwych stanów kwantowych, w szczególności takich, które najlepiej korespondują z rozwiązaniami semiklasycznymi. Przeprowadzono również analizę tych stanów kwantowych które nie wykazują semiklasycznego zachowania. Przypadkiem takim jest stan kota Schrödingera otrzymany z superpozycji dwóch stanów symetrycznych, względem odbicia fizycznej zmiennej pędowej $P \to -P$:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|P_0\rangle + |-P_0\rangle\right). \tag{45}$$



Rysunek 3: Funkcja Wignera dla kosmologicznego stanu kota Schrödingera.

Funkcję Wignera $W(X, P)$, dla zmiennych na fizycznej przestrzeni fazowej parametryzowanej przez (X, P), przedstawiono na Rys. 3.

Obserwowany obszar interferencyjny pomiędzy dwoma semi-klasycznymi maksimami wskazuje na silnie kwantową naturę rozważanego stanu kwantowego. Oddziaływanie takiego silnie kwantowego stanu ze środowiskiem (pozostałe stopnie swobody) prowadzi, w procesie dekoherencji, do wytworzenia stanu mieszanego. W artykule **[H10]** przeprowadzono dyskusję tego procesu oraz przedyskutowano kwestię ewolucji entropii splątania kwantowego. Dużą uwagę poświęcono również możliwości narzucania więzów obserwacyjnych na stany kwantowe opisujące kwantową ewolucję wszechświata, wykorzystując m.in. pomiary parametry Hubble'a.

Przytoczone tu rozważania dotyczą przypadku kosmologicznego modelu jednorodnego. Równie ważne we współczesnej kosmologii są jednak również niejednorodności, odpowiedzialne za formowanie struktur we Wszechświecie. Wyprowadzeniu równań zaburzeń w ramach pętlowej kosmologii kwantowej poświęcona była moja praca doktorska pt. "Perturbations in loop quantum cosmology," jak również publikacje **[P11,P12]**. Pokazano w nich, że równanie skalarnych zaburzeń kosmologicznych v opisywane jest przez

$$\frac{d^2}{d\tau^2}v - \Omega\nabla^2 v - \frac{z_S''}{z_S}v = 0, \tag{46}$$

gdzie $z_S := a\frac{\dot{\varphi}}{H}$. Natomiast, równanie dla modów tensorowych (fale grawitacyjne) u przyjmuje postać

$$\frac{d}{d\tau^2}u - \Omega\nabla^2 u - \frac{z_T''}{z_T}u = 0, \tag{47}$$

gdzie $z_T := a/\sqrt{\Omega}$. Ponadto, τ jest czasem konforemnym zdefiniowanym jako $d\tau = dt/a$. W obydwu przypadkach, funkcja Ω dana jest wyrażeniem:

$$\Omega = \cos(2\lambda p) = 1 - 2\frac{\rho}{\rho_c} \in [-1, 1], \tag{48}$$

gdzie ρ_c jest tą samą krytyczną gęstością energii co w przypadku modelu jednorodnego (równanie (44)).

Celem artykułu **[H9]** było zastosowanie powyższych równań zaburzeń do wyprowadzenia poprawek do pierwotnego widma zaburzeń kosmologicznych z fazy inflacji typu *slow-roll*. Wyprowadzono w tym celu zmodyfikowaną postać tak zwanej próżni Bunch-Davies'a, dla obszaru $\rho < \rho_c$ ($\Omega > 0$). Odstępstwa od standardowego przypadku sparametryzowano za pomocą bezwymiarowej zmiennej

$$\delta_H := \frac{V}{\rho_c}, \tag{49}$$

gdzie V jest wartością potencjału pola inflatonowego w chwili generowania zaburzeń kosmologicznych. Na tej podstawie, otrzymano następujące wyrażenie na widmo zaburzeń skalarnych

$$\mathcal{P}_S(k) = A_S \left(\frac{k}{aH}\right)^{n_S - 1}, \tag{50}$$

gdzie amplituda zaburzeń

$$A_S = \frac{1}{\pi\epsilon}\left(\frac{H}{m_{Pl}}\right)^2 (1 + 2\delta_H), \tag{51}$$

oraz indeks spektralny

$$n_S = 1 + 2\eta - 6\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2\delta_H, \epsilon\eta\delta_H). \tag{52}$$

W powyższych wyrażeniach, $\epsilon \ll 1$ i $|\eta| \ll 1$ są parametrami slow-roll, natomiast m_{Pl} to masa Plancka. W przypadku zaburzeń tensorowych otrzymujemy widmo mocy:

$$\mathcal{P}_T(k) = \frac{16}{\pi}\left(\frac{H}{m_{Pl}}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{\Omega}} = \frac{16}{\pi}\left(\frac{H}{m_{Pl}}\right)^2 (1 + \delta_H) + \mathcal{O}(\delta_H^2), \tag{53}$$

gdzie indeks spektralny

$$n_T = -2\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2\delta_H), \tag{54}$$

Ponadto, tak zwany *tensor-to-scalar ratio* r wyraża się jako

$$r := \frac{A_T}{A_s} = 16\epsilon\frac{(1 + \delta_H)}{(1 + 2\delta_H)} = 16\epsilon\,(1 - \delta_H) + \mathcal{O}(\delta_H^2), \tag{55}$$

prowadząc do następującej zmodyfikowanej postaci relacji pomiędzy r a tensorowym indeksem spektralnym

$$r \approx -8n_T\,(1 - \delta_H)\,. \tag{56}$$

Równanie (55) przewiduje obniżenie wartości parametru r względem przypadku bez efektów LQC, co może mieć potencjalnie znaczenie obserwacyjne. Aktualne ograniczenie na wartość tego parametru wynosi $r < 0.07$, na poziomie ufności 95% (eksperymenty BICEP2 i Keck Array) [26]. Obniżenie przewidywanej teoretycznie wartości r, w wyniku obecności

czynnika δ_H, może poprawić zgodność modelu inflacji slow-roll w świetle dostępnych danych obserwacyjnych. Jednakże, wymagałoby to stosunkowo dużej wartości parametru δ_H. Z drugiej strony, jak wskazują rozważania przeprowadzone w artykule **[H10]**, należy się raczej spodziewać wartości tego parametru rzędu 10^{-12}, co wyklucza możliwość empirycznej weryfikacji tego efektu z wykorzystaniem obserwacji mikrofalowego promieniowania tła.

4.3.5 Deformacje algebry deformacji hiperpowierzchni

Symetrią teorii grawitacji Einsteina jest współzmienniczość, czyli niezmienniczość ze względu na lokalne dyfeomorfizmy. O ile więc w przypadku szczególnej teorii względności (STW), fizyka pozostaje taka sama we wszystkich inercjalnych układach odniesienia, powiązanych transformacjami Lorentza, przypadek OTW rozszerza to dowolnych nieliniowych lokalnych transformacji współrzędnych.

Symetrie w sposób nieodzowny wiążą się z algebrami generatorów tych symetrii. W przypadku STW, jest to algebra generatorów symetrii przestrzeni Minkowskiego, czyli tak zwana algebra Poincaré. W przypadku OTW, algebra generatorów lokalnych dyfeomeorfizmów nosi nazwę *algebry deformacji hiperpowierzchni* (ang. hypersurface deformation algebra (HDA)). Generatorami tej symetrii są: generator dyfeomorfizmów przestrzennych $D[N^a]$, sparametryzowany przez pole wektorowe N^a (ang. shift vector), oraz generator dyfeomorfizmów czasowych $S[N]$, sparametryzowany przez pole skalarne N (ang. lapse function). Ważną własnością teorii grawitacji jest to, że generatory $S[N]$ i $D[N^a]$ odpowiadają więzom w hamiltonowskim sformułowaniu OTW. $D[N^a]$ nosi nazwę wiązu dyfeomorfizmów. Natomiast, $S[N]$ to tak zwany wiąz skalarny, lub inaczej wiąz hamiltonowski. Algebra tych więzów (generatorów) przyjmuje następującą postać:

$$\{D[N_1^a], D[N_2^a]\} = D\left[N_1^b \partial_b N_2^a - N_2^b \partial_b N_1^a\right], \tag{57}$$

$$\{S[N], D[N^a]\} = -S\left[N^b \partial_b N\right], \tag{58}$$

$$\{S[N_1], S[N_2]\} = D\left[s q^{ab}(N_1 \partial_b N_2 - N_2 \partial_b N_1)\right], \tag{59}$$

gdzie q^{ab} oznacza metrykę przestrzenną, z indeksami przestrzennymi $a, b = 1, 2, 3$, natomiast s to sygnatura czasoprzestrzenna. Przypadek $s = 1$ odpowiada czasoprzestrzeni lorentzowskiej, natomiast $s = -1$ czasoprzestrzeni euklidesowej.

Przeprowadzona w ramach pętlowej kosmologii kwantowej, perturbacyjna analiza kosmologicznych modeli niejednorodnych oraz analiza modeli sferycznie-symetrycznych ujawniła, że algebra (57-59) podlega deformacji do postaci **[P11]**:

$$\{D[N_1^a], D[N_2^a]\} = D\left[N_1^b \partial_b N_2^a - N_2^b \partial_b N_1^a\right], \tag{60}$$

$$\left\{S^Q[N], D[N^a]\right\} = -S\left[N^b \partial_b N\right], \tag{61}$$

$$\left\{S^Q[N_1], S^Q[N_2]\right\} = D\left[s\Omega q^{ab}(N_1 \partial_b N_2 - N_2 \partial_b N_1)\right], \tag{62}$$

gdzie $S^Q[N]$ jest zmodyfikowaną postacią wiązu skalarnego, natomiast deformacja struktury algebry związana jest z obecnością funkcji Ω w (62). Ponieważ Ω zależy od zmiennych

opisujących pole grawitacyjne, funkcje struktury powyższej algebry przestają być w ogólności stałymi, sprawiając, że równania (60-62) możemy traktować jako przykład *algebroidu* [27].

Ogólna postać deformacji Ω w pętlowej grawitacji kwantowej nie jest znana, natomiast analizy modeli o zredukowanej symetrii wykazały, że przyjmuje ona postać funkcji cosinus. W szczególności, analiza zaburzeń kosmologicznych prowadzi do wyrażenia na Ω danego wzorem (48). Przypadek braku deformacji ($\Omega = 1$) odzyskiwany jest w granicy niskich gęstości energii $\rho \ll \rho_*$. Natomiast, dla maksymalnej gęstości energii $\rho = \rho_c$, parametr deformacji przyjmuje wartość $\Omega = -1$.

Ponieważ funkcji Ω w równaniu (62) towarzyszy sygnatura metryki s, zmianę znaku Ω można interpretować jako efektywnie zmianę sygnatury **[K4]**. W granicy niskich energii $s\Omega \to s$, co odpowiada przypadkowi lorentzowskiemu dla $s = 1$ lub euklidesowemu dla $s = -1$. Jednakże, gdy osiągana jest maksymalna dopuszczana wartość gęstości energii $\rho \to \rho_c$, efektywna sygnatura $s\Omega \to -s$. Ponadto, dla $\rho = \rho_c/2$ efektywna sygnatura $s\Omega$ staje się niezdefiniowana (to jest $s\Omega = 0$), co może być związane ze stanem asymptotycznej ciszy lub ultralokalności **[K3,P3]**.

Przeprowadzone w pracy **[P11]** rozważania prowadzące do algebry (60-62) są złożone i nie dają natychmiastowego wglądu w przyczynę obecności deformacji Ω w HDA. Takie zrozumienie daje natomiast prosty, 1+1 wymiarowy, model w którym więzy mają następującą postać [28]:

$$S[N] = \int dxN \left(f(p) - \frac{1}{4}\left(\phi'\right)^2 - \frac{1}{2}\phi\phi'' \right), \quad D[w] = \int dxw\phi p', \tag{63}$$

gdzie $f(p)$ to pewna funkcja pędu, która w klasycznym przypadku ma postać $f(p) = \frac{p^2}{2}$. Dopuścimy tu jednak, możliwość modyfikacji członu pędowego. Modyfikacji takiej możemy oczekiwać, w szczególności, w przypadku nieliniowości przestrzeni fazowej, co było dyskutowane w poprzednich rozdziałach.

Rzędy pochodnych przestrzennych we więzach (63) odpowiadają tym w OTW. Obliczając nawias Poissona pomiędzy dwoma więzami skalarnymi, otrzymujemy (dla przypadku lorentzowskiego):

$$\{S[N_1], S[N_2]\} \;=\; D\left[\Omega(N_1' N_2 - N_2' N_1)\right], \tag{64}$$

gdzie

$$\Omega = \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dp^2}. \tag{65}$$

Jak więc widać, to zmodyfikowany człon kinetyczny prowadzi do pojawienia się nietrywialnej deformacji algebry więzów. W standardowym przypadku, gdy $f(p) = \frac{p^2}{2}$, otrzymujemy niezdeformowaną algebrę z $\Omega = 1$. Jednakże, kiedy człon pędowy podlega, dyskutowanej w rozdziale 4.3.4, polimeryzacji (dla której $f(p) = \left(\frac{\sin(p\lambda)}{\lambda}\right)^2$), otrzymujemy:

$$\Omega = \cos(2p\lambda). \tag{66}$$

Jest to wynik zgodny z przewidywaniami otrzymanymi w ramach teorii zaburzeń kosmologicznych oraz dla modeli sferycznie-symetrycznych. Równanie ruchu dla pola ϕ przyjmuje

zaś postać (dla $N = 1$):

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} - \Omega\frac{d^2\phi}{dx^2} = 0, \tag{67}$$

co jest uproszczoną formą równań (46) i (47).W przypadku kiedy $\Omega = \cos(2p\lambda)$, otrzymane równanie (67) jest nieliniowym równaniem różniczkowym cząstkowym mieszanego typu. Szczególnym przypadkiem, ważnym w kosmologii, jest sytuacja w której dokonujemy dekompozycji zmiennych na składowe jednorodne oraz zaburzenia przestrzenne:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \bar{\phi}(t) + \delta\phi(\mathbf{x}, t), \tag{68}$$

$$p(\mathbf{x}, t) = \bar{p}(t) + \delta p(\mathbf{x}, t), \tag{69}$$

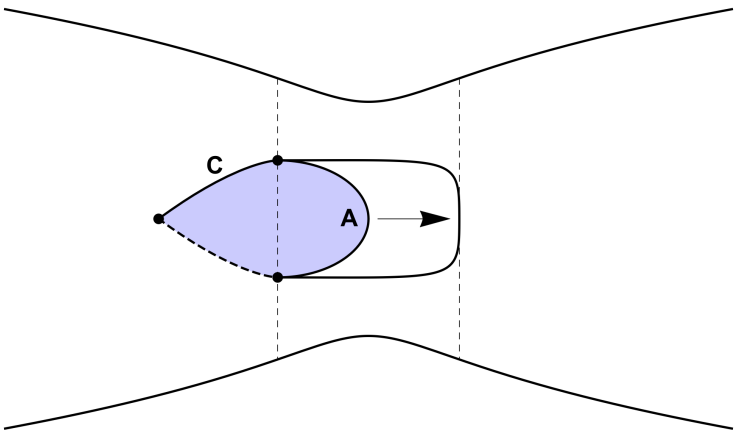
tak że $|\delta\phi/\bar{\phi}| \ll 1$ oraz $|\delta p/\bar{p}| \ll 1$. W takim przypadku, uproszczony wiąz skalarny (63) ulega rozbiciu na człon jednorodny oraz zaburzenia:

$$\begin{aligned} S[N] &= \int dxN \left(f(p) - \frac{1}{4}\left(\phi'\right)^2 - \frac{1}{2}\phi\phi'' \right) \\ &= \int dxN\ f(\bar{p}) + \int dxN\ \left(\frac{1}{2} f_{pp}(\bar{p})\delta p^2 - \frac{1}{4}(\delta\phi')^2 - \frac{1}{2}\delta\phi\delta\phi'' + \dots \right). \end{aligned} \tag{70}$$

Jak widać, wkład jednorodny wiąże się z polimeryzacją pędu $\bar{p}$. Odpowiada temu jednorodny model kosmologiczny z polimeryzacją pędu dyskutowany w poprzednim rozdziale. Wkład jednorodny, nie ujawnia w widoczny sposób obecności zmiany sygnatury. Jednakże, rozważając wiodący człon niejednorodny widzimy, że kwadratowy wyraz kinetyczny δp^2 mnożony jest przez funkcję $\frac{1}{2}f_{pp}(\bar{p}) = \Omega(\bar{p})$ która zmienia się w przedziale $[-1, 1]$. Deformacja pędu, prowadzi więc do zmiany znaku członu kinetycznego w hamiltonianie opisującym niejednorodności perturbacyjne. Ta zmiana znaku stanowi wyzwanie w opisie ewolucji zaburzeń kosmologicznych we wczesnym wszechświecie.

W standardowej kosmologii, człon kinetyczny zachowuje dodatni znak w całym toku ewolucji, co przekłada się na hiperboliczność równań opisujących ewolucję zaburzeń kosmologicznych. W przypadku takim, zagadnienie początkowe (oparte o problem Cauchy'ego) jest dobrze zdefiniowane. Jednakże, w sytuacji równania ze zmianą sygnatury (równanie różniczkowe mieszanego typu) procedura ustalenia zagadnienia początkowego wymaga uogólnienia. Możliwe rozwiązanie tego problemu przedstawiliśmy z prof. Martinem Bojowaldem w artykule **[H7]**. Wykorzystaliśmy w tym celu własności znanego przypadku cząstkowego równania różniczkowego mieszanego typu, jakim jest równanie Tricomiego. Na tej podstawie, udowodniliśmy, że możliwe jest znalezienie stabilnych i jednoznacznych rozwiązań dla rozważanego przypadku, łącząc zagadnienie warunków początkowych (dla równania hiperbolicznego) z zagadnieniem warunków brzegowych (dla równania eliptycznego). Sytuację tę zobrazowano na Rys. 4.

Na rysunku tym przedstawiono wszechświat dla fazy odbicia (ang. bounce), w którym przechodzi on od epoki kontrakcji (lewa strona) do epoki ekspansji (prawa strona). Pionowe przerywane linie reprezentują hiperpowierzchnie, dla których następuje zmiana sygnatury ($\Omega = 0$). Obszar pomiędzy tymi hiperpowierzchniami to faza euklidesowa z $\Omega < 0$, w której



Rysunek 4: Problem Tricomiego w przypadku kosmologii ze zmianą sygnatury.

równania opisujące zaburzenia przyjmują postać eliptyczną. W regionach po prawej i lewej stronie tego obszaru $\Omega > 0$, co odpowiada czasoprzestrzeniom lorentzowskim. Równania różniczkowe opisujące zaburzenia kosmologiczne przyjmują w fazie lorentzowskiej postać hiperboliczną. Sposobem pogodzenia warunków brzegowych dla równań eliptycznych z warunkami początkowymi dla równań hiperbolicznych jest wykorzystanie *charakterystyk*, które są uogólnieniem stożków świetlnych. Mianowicie, zagadnienie początkowe dla równania hiperbolicznego można przeformułować jako zagadnienie brzegowe na powierzchni charakterystyk. Na tej podstawie, odpowiednio łącząc charakterystyki (w fazie lorentzowskiej) z brzegiem w fazie euklidesowej możemy dla obszaru zamkniętego tą powierzchnią poprawnie zdefiniować warunki brzegowe. Na Rys. 4 obszar ten został zaznaczony jako zacieniony region. Definiując wartości brzegowe pól na charakterystyce C oraz na brzegu A można w sposób jednoznaczny znaleźć rozwiązania w obszarze wewnątrz. Ponadto, wartości na brzegu drugiej charakterystyki, zaznaczonej jako przerywana linia, wynikają z warunków brzegowych na C i A. Kontur A można odpowiednio deformować, tak by np. jego prawa strona zbliżała się do hiperpowierzchni zmiany sygnatury po stronie prawej. Postępując w ten sposób, rozwiązanie równań wewnątrz obszaru zadadzą nam warunki początkowe dla obszaru lorentzowskiego po stronie prawej, czyli dla wszechświata podlegającego ekspansji. W pracy **[H7]**, można znaleźć zastosowanie opisanej tu metody dla konkretnych przypadków ewolucji kosmologicznej. Ponadto, pokazano, że rozwiązania ze zmianą sygnatury obecne w LQC, charakteryzują się regularnym zachowaniem przechodząc przez wartość graniczną $\Omega = 0$. Jest to zachowanie bardzo pożądane i odmienne od tego obserwowanego w klasycznych modelach ze zmianą sygnatury, nie wynikających z deformacji symetrii.

4.3.6 Deformacja algebry Poincaré

W poprzednim rozdziale pokazaliśmy, że nieliniowość przestrzeni fazowej może prowadzić do deformacji algebry deformacji hiperpowierzchni. W szczególności, dotyczy to cylindrycznej przestrzeni fazowej, związanej z periodyfikacją pędów w pętlowej kosmologii kwantowej.

Przestrzeń fazowa tego typu prowadzi do deformacji nawiasu Poissona pomiędzy dwoma więzami skalarnymi. Otrzymany parametr deformacji Ω powoduje natomiast zmianę sygnatury z lorentzowskiej na euklidesową w obszarze planckowskich gęstości energii.

Algebra Poinaré może być otrzymana z HDA w granicy liniowych deformacji hiperpowierzchni przestrzennej Σ. Bazując na wynikach otrzymanych w artykułach **[H3]** i **[H8]**, w rozdziale niniejszym przedyskutujemy jakie znaczenie dla algebry Poincaré mają pętlowe deformacje algebry deformacji hiperpowierzchni. W tym celu, rozważmy liniową postać funkcji lapse $N(x)$ oraz wektora $N^a(x)$:

$$N(x) = \Delta t + v_a x^a \,, \quad N^a(x) = \Delta x^a + R^a{}_b x^b \,, \tag{71}$$

razem z metryką przestrzenną daną przez deltę Kroneckera, $q_{ab} = \delta_{ab}$. Ponadto, Δt, Δx^a, v_a oraz $R^a{}_b$ parametryzują odpowiednio infinitezymalne: translacje czasowe, translacje przestrzenne, pchnięcia (boosty) oraz rotacje przestrzenne. Macierz rotacji przestrzennych może być wyrażona poprzez infinitezymalne kąty φ^a w następujący sposób: $R^{ab} = \epsilon^{bac}\varphi_c$. Przy takim wyborze $N(x)$ i $N^a(x)$, wiąz skalarny oraz wiąz dyfeomorfizmów przestrzennych możemy wyrazić jako:

$$S[N] = S[\Delta t + v_a x^a] = -\Delta t P_0 - v^a K_a \,, \tag{72}$$

$$D[N^a] = D[\Delta x^a + R^a{}_b x^b] = -v^b P_b - \varphi^b J_b \,. \tag{73}$$

gdzie P_0, P_a, J_a i K_a oznaczają kolejno generatory: translacji czasowych, translacji przestrzennych, boostów i rotacji. Jak pokazaliśmy, we współpracy z dr Tomaszem Trześniewskim, w artykule **[H3]** otrzymana z algebry (60-62) zdeformowana algebra Poinaré przyjmuje postać:

$$\{J_a, J_b\} = \epsilon_{abc} J^c \,, \tag{74}$$

$$\{J_a, K_b\} = \epsilon_{abc} K^c \,, \tag{75}$$

$$\{K_a, K_b\} = -s_{\text{eff}} \epsilon_{abc} J^c \,, \tag{76}$$

$$\{J_a, P_b\} = \epsilon_{abc} P^c \,, \tag{77}$$

$$\{J_a, P_0\} = 0 \,, \tag{78}$$

$$\{K_a, P_b\} = \delta_{ab} P_0 \,, \tag{79}$$

$$\{K_a, P_0\} = s_{\text{eff}} P_a \,, \tag{80}$$

$$\{P_a, P_b\} = 0 \,, \tag{81}$$

$$\{P_a, P_0\} = 0 \,, \tag{82}$$

gdzie wprowadziliśmy efektywną sygnaturę s_{eff}, zdefiniowaną w następujący sposób:

$$s_{\text{eff}} = s\tilde{\Omega} := s\langle\Omega\rangle_D = s\frac{D\left[\Omega q^{ab}(N_1\partial_b N_2 - N_2\partial_b N_1)\right]}{D\left[q^{ab}(N_1\partial_b N_2 - N_2\partial_b N_1)\right]} \,. \tag{83}$$

Jest to ogólne i nie wynika ze szczególnej postaci funkcji Ω. Otwartym problemem jest wyrażenie s_{eff} poprzez generatory P_0, P_a, J_a i K_a. W artykułach **[H3]** i **[H8]** pokazano,

że już warunek spełnienia tożsamości Jacobiego (ważnej z uwagi na własność łączności) oraz korespondencja z przypadkiem bez deformacji narzucają silne ograniczenia na postać funkcji s_{eff}. Przeprowadzone w pracy **[H3]** rozumowanie doprowadziło do wyprowadzenia następującej postaci tej funkcji:

$$s_{\text{eff}} = s\frac{P_0^2 - \alpha}{\mathbf{P}^2 - \alpha}\,, \tag{84}$$

gdzie α jest stałą całkowania o wymiarze kwadrat energii, tak że w granicy $|\alpha| \to \infty$ odzyskiwany jest przypadek bez deformacji. Ponadto, operator Casimira dla algebry (74-82) dany jest przez

$$\mathcal{C}_1 = \frac{-P_0^2 + \mathbf{P}^2}{1 - \alpha^{-1}\mathbf{P}^2}. \tag{85}$$

Znajomość operatora Casimira pozwoliła wyprowadzić postać zmodyfikowanych transformacji Lorentza oraz niezmienniczej miary na przestrzeni pędów $d\mu(P)$. Pokazano, że $\sqrt{\alpha}$ jest niezmieniczą (względem zmodyfikowanych transformacji Lorentza) skalą energii, wyznaczającą granice pomiędzy reżimem lorentzowskim i euklidesowym. W pracy **[H8]** dokonano ograniczeń na tę skalę energii, wykorzystując dane astronomiczne pochodzące z błysków gamma.

W celu lepszego scharakteryzowania otrzymanej zdeformowanej przestrzeni Poincaré dokonano, między innymi, analizy tak zwanego *wymiaru spektralnego* [29]. Definicja tej wielkości wiąże się z zależnością procesu dyfuzji od wymiaru przestrzeni na jakiej ten proces się odbywa. Im wyższy wymiar przestrzeni tym mniejsze prawdopodobieństwo powrotu do punku wyjścia. Uśrednione po przestrzeni prawdopodobieństwo powrotu możemy zaś wyrazić jako:

$$P(\sigma) := \mathrm{tr}K(\sigma) = \frac{\int \sqrt{|\det g|}\, d^4x K(x,x;\sigma)}{\int \sqrt{|\det g|}\, d^4x} = \int d\mu(P)\, e^{\sigma\Delta_P}\,, \tag{86}$$

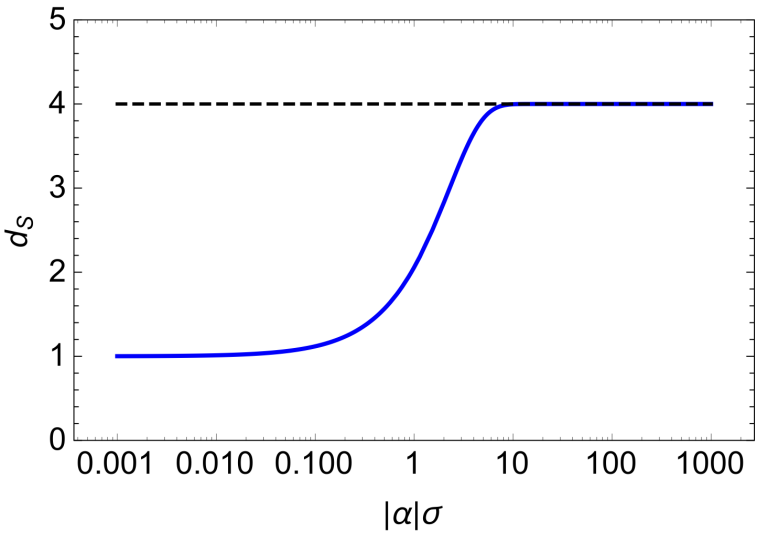
gdzie $K(x,y;\sigma)$ to tak zwany heat kernel z czasem dyfuzji σ, natomiast Δ_P to pędowa reprezentacja operatora Laplace'e. Postać operatora Δ_P można wyznaczyć wykorzystując euklidesową wersję operatora Casimira (85).

Wykorzystując $P(\sigma)$ możemy zdefiniować wymiar spektralny $d_S(\sigma)$ jako:

$$d_S(\sigma) := -2\frac{\partial \log P(\sigma)}{\partial \log \sigma} \tag{87}$$

będący funkcją czasu dyfuzji σ. Otrzymaną zależność wymiaru spektralnego od czasu dyfuzji, dla jednego z wariantów wynikającego z pętlowej deformacji symetrii czasoprzestrzeni Minkowskiego, przedstawiono na Rys. 5.

Jak widać, wymiar spektralny maleje od wartości $d_S = 4$ dla dużych czasów dyfuzji (IR) do wartości równej $d_S = 1$ dla małych czasów dyfuzji (UV). Wynik ten jest zgodny z przewidywaniami dla fazy ultralokalnej, odpowiadającej wartości $\Omega = 0$. W stanie tym następuje kolaps stożków świetlnych, uniemożliwiając przemieszczanie się w kierunkach przestrzennych. Jedynym pozostającym dla dyfuzji wymiarem jest wymiar czasowy. To tłumaczy redukcję wymiaru spektralnego do wartości $d_S = 1$. Wynik ten jest zgody z przewidywaniami kosmologicznymi dotyczącymi fazy ultralokalnej w pętlowej kosmologii kwantowej **[K3,P3]**.



Rysunek 5: Zależność wymiaru spektralnego od czasu dyfuzji dla czasoprzestrzeni opisywanej przez pętlowo zdeformowaną algebrą Poincaré.

4.3.7 Kosmologia ze zwartymi przestrzeniami fazowymi

Kosmologię można uznać za poligon doświadczalny do badania możliwych efektów nieliniowości przestrzeni fazowych pól. W rozdziale 4.3.4 przedyskutowano szczególny przypadek jakim jest pętlowa kosmologia kwantowa z cylindryczną przestrzenią fazową. Wynikające stąd konsekwencje dotyczące warunków początkowych w kosmologii omówiono następnie w rozdziale 4.3.5. Naturalnym kolejnym krokiem jest zbadanie tego jakie są kosmologiczne konsekwencje zwartości przestrzeni fazowych (dyskutowanych w rozdziale 4.3.2).

Pierwszy krok w tym kierunku podjęto w artykule **[H5]**. W pracy tej rozważono jednorodny i izotropowy wszechświat Friedmanna-Robertsona-Walkera z polem skalarnym, charakteryzującym się sferyczną przestrzenią fazową o polu powierzchni $4\pi S$. Dyskutowany w pracy hamiltonian pola skalarnego wynikał z modelu spinowego XXZ, omawianego w rozdziale 4.3.3. Zbadano zarówno dynamikę na poziomie modelu jednorodnego oraz przeprowadzono uproszczoną analizę generacji zaburzeń inflacyjnych w przybliżeniu pola testowego (ang. test field approximation).

Pokazano, że w przypadku kosmologii jednorodnej, zwartość przestrzeni fazowej prowadzi m.in. do możliwości zapadnięcia się (rekolapsu) wszechświata na późnym etapie jego ewolucji. Efekt ten wiąże się z obecnością modyfikacji równania Friedmanna, które, w rozwinięciu względem parametru $1/S$, przyjmuje postać:

$$H^2 = \frac{\kappa}{3}\rho_\varphi - \frac{\kappa}{9}\frac{q^2}{Sq_0 m}\left(\rho_\varphi^2 - \frac{1}{2}P_\varphi^2\right) + \mathcal{O}(1/S^2)\,, \tag{88}$$

gdzie ρ_φ to standardowa gęstość pola skalarnego natomiast P_φ to ciśnienie pola skalarnego. W powyższym równaniu m jest masą pola φ. W przypadku kiedy $\rho_\varphi^2 - \frac{1}{2}P_\varphi^2 > 0$, co dla barotropowego równania stanu $P_\varphi = w\rho_\varphi$ odpowiada warunkowi dla $|w| < \sqrt{2} \approx 1.42$ (co jest spełnione dla typowych form materii), wyraz rzędu $1/S$ w równaniu (88) pozostaje

ujemny. Wkład ten zaczyna być istotny dla dużych wartości czynnika skali (lub równoważnie zmiennej q) prowadząc do fazy *rekolapsu*.

O ile dla przypadku jednorodnego udało się przeprowadzić analizę dla całej przestrzeni fazowej, tak w przypadku zaburzeń zdołano dotychczas zbadać jedynie najbliższe otoczenie granicy afinicznej. Odstępstwa od przypadku standardowego przeanalizowano do wyrażeń liniowych w rozwinięciu w parametrze anizotropii Δ modelu XXZ Heisenberga. Pokazano, że funkcje modów uogólniają przypadek próżni Bunch-Davies'a w następujący sposób:

$$f_k = \frac{e^{ix}}{\sqrt{2k}} \left[1 + \frac{\Delta x^2}{3\eta} \left(\frac{1}{4} + \frac{i}{x^2} \int x^2 dx \right) \right] + \mathcal{O}(\Delta^2)\,, \tag{89}$$

gdzie $x = -k\tau$ oraz $\eta := \frac{m^2}{3H^2}$. Na tej podstawie, widmo mocy pola skalarnego przyjmuje postać:

$$\mathcal{P}_\varphi(k,\tau) = \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 x^2 \left(1 + \frac{\Delta}{6\eta} x^2 + \mathcal{O}(\Delta^2) \right) \tag{90}$$

tak, że na skalach (super)horyznontalnych ($x \approx 1$) otrzymujemy:

$$\mathcal{P}_\varphi(x \approx 1) \approx \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 \left(1 + \frac{\Delta}{6\eta} + \mathcal{O}(\Delta^2) \right). \tag{91}$$

Ponadto, pokazano, że indeks spektralny nie podlega liniowym w Δ poprawkom.

Przyjmując, że jedynie pole skalarne podlega kompaktyfikacji przestrzeni fazowej, lub że skala energetyczna tego efektu jest dużo niższa niż w przypadku pola grawitacyjnego, możemy dojść do pewnych dodatkowych wniosków o znaczeniu empirycznym. Mianowicie, wykorzystując wzór (91) w połączeniu z wynikiem dla zaburzeń tensorowych, traktowanych w sposób standardowy, otrzymujemy następujące oszacowanie na tensor-to-scalar ratio:

$$r = \frac{A_T}{A_S} = r_0 \left(1 - \frac{\Delta}{6\eta} \right) < r_0, \tag{92}$$

gdzie r_0 odpowiada przypadkowi bez krzywizny przestrzeni fazowej pola skalarnego. Otrzymana poprawka, proporcjonalna do Δ prowadzi więc (dla dodatnich wartości Δ, które są fizycznie preferowane z uwagi na kwestię stabilności) do obniżenia wartości r, względem przypadku z afiniczną przestrzenią fazową. Przewidywanie to może poprawić dopasowania modeli inflacyjnych typu slow-roll, względem obserwacji mikrofalowego promieniowania tła. Kwestia ta wymaga jednak dalszej, pogłębionej dyskusji.

Warte podkreślenia jest również, że wyniki uzyskane w artykule **[H5]** otwierają nową możliwość budowania relacji pomiędzy kosmologią a fizyką materii skondensowanej. Wynika to z faktu opierania hamiltonianów pól materii na hamiltonianach układów spinowych. W pracy **[H5]**, przedyskutowano tę relację dla przypadku modelu XXZ Heisenberga. Model ten, w granicy $\Delta \to 0$ oraz dużego spinu ($S \to \infty$), prowadzi do teorii pola skalarnego Kleina-Gordona. Relacja ta może być źródłem nowych idei zarówno w kosmologii jak i w fizyce materii skondensowanej. W szczególności, można myśleć o eksperymentalnej realizacji analogicznych modeli kosmologicznych w oparciu o odpowiednio zaprojektowane układy spinowe. Obecność spinu jako podstawowego stopnia swobody otwiera również drogę do przeprowadzenia symulacji kosmologicznych z wykorzystaniem metod rozwiniętych dla modeli spinowych (np. sieci tensorowe) oraz komputerów kwantowych.

4.3.8 W stronę zwartej przestrzeni fazowej pola grawitacyjnego

Program badawczy NFST stawia sobie za jeden z głównych celów wprowadzenie zwartych przestrzeni fazowych do opisu oddziaływań grawitacyjnych. Dobrym punktem wyjścia do budowy teorii grawitacji charakteryzującej się zwartą przestrzenią fazową jest pętlowa grawitacja kwantowa (LQG), u której podstaw stanęły prace A. Ashtekara, C. Rovelliego oraz L. Smolina [30, 31]. LQG opiera się na formaliźmie zmiennych Ashtekara w ramach którego pole grawitacyjne opisywane jest przez zmienne kanoniczne A i E, należące do algebry $\mathfrak{su}(2)$. Przestrzeń fazowa sparametryzowana przez zmienne Ashtekara jest płaska (afiniczna). Jednakże, przechodząc do teorii kwantowej, eksponencjacji podlega koneksja A. Otrzymana w ten sposób holonomia jest już elementem grupy $SU(2)$, opisywanej przez zwartą topologię. Przy czym, zbudowany z E tak zwany strumień (ang. flux), pozostaje elementem algebry. Można więc stwierdzić, że w ramach LQG, przestrzeń fazowa jest częściowo zwarta.

W przypadku symetrycznie zredukowanych modeli LQG, takich jak pętlowa kosmologia kwantowa, częściowa zwartość przestrzeni fazowej prowadzi do polimeryzacji, dyskutowanej w rozdziale 4.3.4. W szczególności, dla modelu FRW przestrzeń fazowa teorii semiklasycznej przyjmuje postać cylindra $\mathbb{R} \times \mathbb{S}$. W takim przypadku, zmienna $q \in \mathbb{R}$ związana jest z polem E, natomiast zmienna spolimeryzowana $p \in \mathbb{S}$ jest zredukowaną koneksją Ashtekara A.

W zaproponowanym w ostatnich latach alternatywnym podejściu do LQG [32], rozważana jest sytuacja odwrotna, tzn. pole E podlega eksponencjacji, natomiast koneksja A pozostaje elementem algebry. Te dwa wybory można uznawać za dwie nierównoważne reprezentacje LQG, związane z dwoma odmiennymi stanami próżni teorii. W przypadku standardowego podejścia (eksponencjacja A) mamy do czynienia z tak zwaną próżnią Ashtekara-Lewandowskiego $|0\rangle_{AL}$ opisującą stan o zerowej objętości, natomiast nowy stan próżni $|0\rangle_{BF}$ (dla przypadku eksponencjacji E) odpowiada konfiguracji geometrii o stałej krzywiźnie.

Naturalnym, kolejnym krokiem wydaje się rozważanie sytuacji w której zarówno pole E jaki i A podlegają eksponencjacji. W przypadku takim, przestrzeń fazowa przypadająca na link sieci spinowej ma postać $\Gamma = SU(2) \times SU(2)$. Przestrzeń fazowa jest więc zwarta. Możliwość takiego uogólnienia LQG została zasugerowana w pracy [17] i wstępnie przedyskutowana na przypadku modelu $2+1$ wymiarowego. Warto tu zaznaczyć, że w celu skonstruowania takiej teorii należy sobie poradzić, między innymi, z kwestią możliwych rozbieżności w podczerwieni. Mianowicie, grupa $SU(2)$ pozwala na wkłady od dowolnych nieredukowalnych reprezentacji numerowanych przez $s = \frac{n}{2}$, gdzie $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ponieważ pole powierzchni przestrzeni fazowej dla stanu charakteryzowanego liczbą kwantową s równe jest $Ar_{S^2} = 4\pi\hbar s$, wielkość ta może dążyć do nieskończoności dla $s \to \infty$.

Jak pokazano na poziomie modeli niżej wymiarowych (2+1), nieograniczoność s prowadzi do rozbieżności w podczerwieni, zwanych *spikeami* [17]. Rozbieżności takie, w szczególności obserwuje się w modelu Ponzano-Regge. Na początku lat 90-tych ubiegłego wieku, wykazano jednakże, najpierw w ramach rozważań matematycznych (model Turaev-Viro) po czym w pracy S. Mizoguchi oraz T. Tada [33], że rozbieżności te można usunąć wprowadzając $\mathfrak{q}$-deformację do grupy $SU(2)$, otrzymując $SU_{\mathfrak{q}}(2)$, której przypadek z $\mathfrak{q} \in \mathbb{R}$ został

wprowadzony w pracach [34].

Obecność deformacji z $\mathfrak{q} \neq 1$, prowadzącej do maksymalnej dopuszczalnej wartości $s = s_{\max}$, usuwa tym samym rozbieżności podczerwone teorii. Co więcej, w modelach $2+1$ wymiarowych udało się pokazać, że parametr deformacji $\mathfrak{q}$ jest związany ze stałą kosmologiczną Λ poprzez relację $\mathfrak{q} = e^{i\Lambda\hbar G}$. W pracy **[PP2]**, wraz z dr Michałem Artymowskim, pokazaliśmy, że relacja ta jest spełniona również w przypadku (3+1) wymiarowym i wiąże się z kwantową naturą horyzontu kosmologicznego.

Krokiem pośrednim w drodze do skonstruowania teorii grawitacji ze zwartymi przestrzeniami fazowymi pól, jest wprowadzenie zwartości przestrzeni fazowej na poziomie modeli minisuperspace. Najprostszym przykładem takiego układu jest model kosmologiczny Fiedmanna-Robertsona-Walkera, posiadający tylko jeden grawitacyjny stopień swobody - czynnik skali a, lub wyrażoną przez niego, wprowadzoną wcześniej zmienną q. W przypadku klasycznym, mamy do czynienia z formą symplektyczną $\omega = dp \wedge dq$, którą będziemy chcieli uogólnić do postaci odpowiadającej zwartej przestrzeni fazowej. Dla zobrazowania tej procedury, posłużmy się, dyskutowanym wcześniej, przypadkiem sferycznej przestrzeni fazowej $\mathbb{S}^2$, dla której, wyrażenie zmiennych kątowych w następujący sposób:

$$\phi = \frac{p}{R_1} \in (-\pi, \pi], \tag{93}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{q}{R_2} \in (0, \pi), \tag{94}$$

tak, że $S = R_1 R_2$, prowadzi do formy symplektycznej w postaci:

$$\omega = \cos\left(\frac{q}{R_1}\right) dp \wedge dq. \tag{95}$$

Ponieważ chcielibyśmy skoncentrować tutaj naszą uwagę jedynie na części grawitacyjnej (przypadek materii ze zwartą przestrzenią pola był dyskutowany w poprzednim rozdziale 4.3.7), rozważmy model FRW (k=0) jedynie ze stałą kosmologiczną Λ, czyli na modelu de Sittera z zerową krzywizną. Modelowi takiemu, odpowiada klasycznie hamiltonian:

$$H = Nq\left(-\frac{3}{4}\kappa p^2 + \frac{\Lambda}{\kappa}\right), \tag{96}$$

co odpowiada równaniu (40) z $\rho = \frac{\Lambda}{\kappa}$. Najprostszym sposobem uogólnienia klasycznego Hamiltonianu do przypadku sferycznej przestrzeni fazowej jest dokonanie zamiany:

$$p \to p_S := \frac{S_y}{R_2} = R_1 \sin\left(\frac{p}{R_1}\right) \cos\left(\frac{q}{R_2}\right), \tag{97}$$

$$q \to q_S := -\frac{S_z}{R_1} = R_2 \sin\left(\frac{q}{R_2}\right), \tag{98}$$

która przeprowadza hamiltonian (96) do postaci

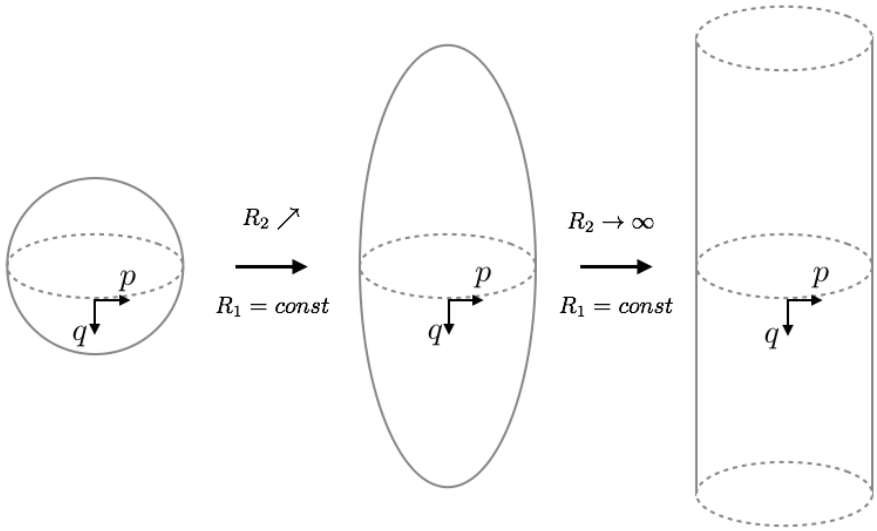
$$H_S = N\frac{S_z}{R_1}\left[\frac{3}{4}\kappa\frac{S_y^2}{R_2^2} - \frac{\Lambda}{\kappa}\right], \tag{99}$$

tak, że $H_S \to H_{\mathrm{GR}}$ w granicy $R_1, R_2 \to \infty$. W oparciu o hamiltonian (99) możemy wyprowadzić zmodyfikowane równanie Friedmanna w następującej postaci:

$$H^2 = \frac{\Lambda}{3}\left(\frac{\sin(q/R_2)}{q/R_2}\right)^2 \left[\frac{\cos^2(q/R_2) - \delta}{\cos^2(q/R_2)}\right], \tag{100}$$

gdzie ustalono cechowanie $N = 1$ oraz wprowadzono parametr $\delta := \frac{\Lambda}{\Lambda_*} = \frac{4}{3}\frac{\Lambda}{R_1^2\kappa^2}$. Rozwiązania równanie (100) mają nieosobliwą postać i można je otrzymać w sposób analityczny. Opisują one połączone ze sobą fazy (wykładniczej) ekspansji oraz kontrakcji de Sittera, połączone poprzez fazę rekolapsu, podczas którego zmienna q (objętość) osiąga maksymalną wartość $q_{\max} = \frac{R_2}{2}\arccos(2\delta - 1)$.

Zgodnie z rozważaniami przeprowadzonymi w **[H1]**, przypadek sferycznej przestrzeni fazowej redukuje się, w granicy $R_2 \to \infty$, do modelu z cylindryczną przestrzenią fazową, dyskutowanego w rozdziale 4.3.4. Przedstawiono to graficznie na Rys. 6.



Rysunek 6: Przejście pomiędzy sferyczną przestrzenią fazową a cylindryczną przestrzenią fazową, związaną z polimeryzacją.

W granicy $R_2 \to \infty$, algebra $\mathfrak{so}(3)$ zmiennych S_i upraszcza się do postaci:

$$\left\{\sin\left(\frac{p}{R_1}\right), \cos\left(\frac{p}{R_1}\right)\right\} = 0, \tag{101}$$

$$\left\{q, R_1 \sin\left(\frac{p}{R_1}\right)\right\} = \cos\left(\frac{p}{R_1}\right), \tag{102}$$

$$\left\{q, \cos\left(\frac{p}{R_1}\right)\right\} = -\frac{1}{R_1}\sin\left(\frac{p}{R_1}\right), \tag{103}$$

co odpowiada przestrzeni fazowej $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Równocześnie, hamiltonian (99) przyjmuje postać:

$$H_C = Nq\left[-\frac{3\kappa}{4}\frac{\sin^2(\lambda p)}{\lambda^2} + \frac{\Lambda}{\kappa}\right], \tag{104}$$

gdzie, wprowadzona została skala polimeryzacji $\lambda := \frac{1}{R_1}$ tak, że w granicy $R_1 \to \infty$ odzyskiwany jest klasyczny hamiltonian H_{GR}. Wyrażenie (104) jest równoważne temu rozważanemu w kontekście LQC (równanie (41)). Rozważając równanie Friedmanna (100) w granicy $R_2 \to \infty$ otrzymujemy:

$$H^2 = \frac{\Lambda}{3}\left(1 - \delta\right). \tag{105}$$

gdzie $\delta := \frac{\Lambda}{\Lambda_*} = \frac{4}{3}\frac{\Lambda}{R_1^2\kappa^2} \in [0,1]$. Obecność tej maksymalnej dopuszczalnej wartości stałej kosmologicznej $\Lambda = \Lambda_*$ w modelach pętlowej kosmologi kwantowej była dyskutowana w moich wcześniejszych artykułach **[P14, P17, P30]**.

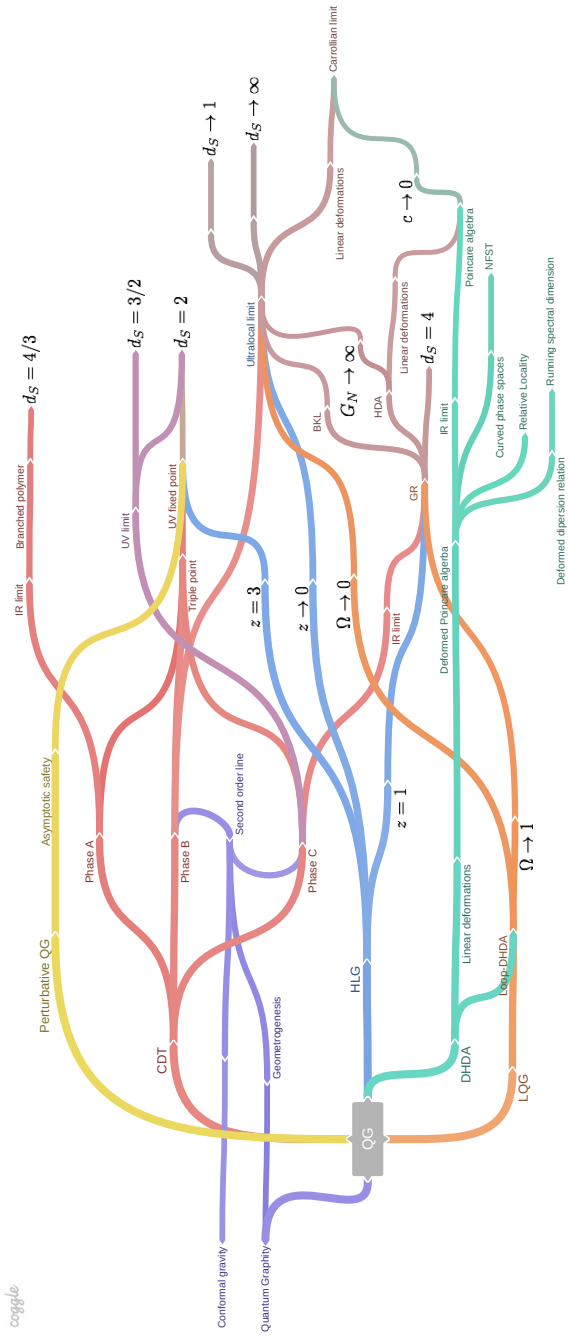
Kolejnym krokiem, wychodzącym już poza ramy dyskutowanych tutaj wyników będzie zarówno zbadanie kwantowej wersji przedstawionego tu modelu jak i wykorzystanie zdobytego przy jego analizie doświadczenia w celu podjęcia próby opisu systemu grawitacyjnego z dużą (dążącą do nieskończoności) liczbą stopni swobody. Badania te są obecnie prowadzone i już wykazały istnienie dobrze określonej wersji kwantowej prezentowanego tu modelu.

4.3.9 Podsumowanie

Zaprezentowane tu wyniki przedstawiają różne aspekty nieliniowości przestrzeni fazowych w kontekście oddziaływań grawitacyjnych. Choć przedstawione kierunki wymagają dalszych pogłębionych badań, już na tym etapie zaczyna się z nich wyłaniać pewien całościowy obraz. Próbę syntezy podjęto w pracy **[H2]**, w której pokuszono się o zbudowanie mapy relacji pomiędzy różnymi aspektami oddziaływań grawitacyjnych, w szczególności tych mających związek z nieliniowością przestrzeni fazowych. Relacje te, zawierające również obszary nie dyskutowane tutaj, zawarto na Rys. 7.

Na tej podstawie, możemy dokonać następującego podsumowania: Zwartość przestrzeni fazowych jest pożądaną cechą teorii fizycznych, gdyż odpowiada semi-klasycznym opisom układów kwantowych charakteryzujących się skończenie wymiarowymi przestrzeniami Hilberta. Zwartość przestrzeni fazowych pozwala uniknąć wielu problemów teorii z afinicznymi przestrzeniami fazowymi, takich jak osobliwości. Wynika to z faktu, iż zwartość przestrzeni fazowych narzuca ograniczenia na wartości zmiennych fazowych, uniemożliwiając ich dążenie do nieskończoności. Szczególnie interesujący jest przypadek sferycznej przestrzeni fazowej, pozwalający wyrazić dynamikę pól o przestrzeniach afinicznych jako graniczny przypadek dynamiki systemów spinowych. Korespondencję taką przebadano dokładnie na przypadku pola skalarnego w pracach **[H1,H4,H6]**. Warto tu podkreślić, że jednymi z zaobserwowanych efektów nieliniowości przestrzeni fazowych pól jest modyfikacja relacji dyspersji dla cząstek, $\mathfrak{q}$-deformacje algebr operatorów oraz występowanie modyfikacji relacji nieoznaczoności. Efekty tego typu są powszechnie rozważane w kontekście uchwycenia zjawisk fizyki na skali Plancka.

Jak następnie podkreślono, częściową zwartość przestrzeni fazowych spotykamy już od lat w opisie oddziaływań grawitacyjnych w ramach pętlowej kosmologii kwantowej i pętlowej grawitacji kwantowej. W szczególności, tak zwane kwantowanie polimerowe wprowadza



Rysunek 7: Wybrane zależności pomiędzy różnymi aspektami podejść do kwantowej grawitacji, dyskutowanymi w **[H2]**.

(na poziomie semiklasycznym) periodyfikację przestrzeni fazowej, nadając jej kształt cylindra. Konsekwencje takiej przestrzeni fazowej dla kwantowej dynamiki kosmologicznej oraz dla pierwotnych zaburzeń inflacyjnych przedyskutowano w pracach **[H9,H10]**. Miedzy innymi, rozważania dotyczące zaburzeń kosmologii pętlowej doprowadziły do obserwacji, że nieliniowość przestrzeni fazowej prowadzi do deformacji symetrii teorii grawitacji. Przejawia się to poprzez deformacje tak zwanej *algebry deformacji hiperpowierzchni*. W szczególności, dla przypadku cylindrycznej przestrzeni fazowej zaobserwowano efekt zmiany sygnatury

metryki. Efekt ten wymusza zrewidowanie rozważań dotyczących zagadnienia warunków początkowych w kosmologii wczesnego wszechświata. Zagadnieniu temu, jak i próbie zrozumienia tego efektu na bazie rozważań systemów ze spontanicznym łamaniem symetrii poświęcono pracę **[H7]**. Badania te doprowadziły do wprowadzenia nowego typu zagadnienia początkowego w kosmologii, opartego na metodzie charakterystyk.

Algebra deformacji hiperpowierzchni opisuje symetrię ogólnej teorii względności, czyli niezmienniczość względem lokalnych dyfeomorfizmów. Jak pokazano w przypadku LQC, wprowadzenie nieliniowości przestrzeni fazowej może prowadzić do deformacji tej algebry, z zachowaniem liczby generatorów symetrii. Jak wiadomo, szczególnym przypadkiem HDA, odpowiadającym deformacjom liniowym, jest algebra Poinacé. W pracach **[H3]** i **[H8]** podjęto próbę wyprowadzenia postaci algebry Poincaré wynikającej z pętlowo zdeformowanej algebry deformacji hiperpowierzchni. Pokazano, że otrzymana algebra może przewidywać modyfikacje relacji dyspersji. Na tej podstawie, narzucono również więzy obserwacyjne na skalę energii związaną z deformacją. Zbadano również proces dyfuzji, wykazując przejawianie się (na poziomie wymiaru spektralnego) efektu tak zwanej *ciszy*.

Rozważanie te pokazały, że nieliniowość przestrzeni fazowej grawitacyjnych stopni swobody propaguje się na własności lokalne przestrzeni i relacje dyspersji dla cząstek oraz geometrię ich przestrzeni pędów. Efekty tego typu są obiektem szerokich badań w zakresie fenomenologii kwantowej grawitacji, w szczególności w podejściu zwanym *względna lokalność*. Na podstawie przeprowadzonych badań można dojść do wniosku, że rozważana w tym podejściu nieliniowość przestrzeni fazowej cząstek może być związana zarówno z nieliniowością przestrzeni fazowej pola którego ta cząstka jest elementarnym wzbudzeniem lub też być konsekwencją nieliniowości przestrzeni fazowej pola grawitacyjnego i w konsekwencji deformacji symetrii czasoprzestrzennych. Nieliniowość przestrzeni fazowych pozwala więc zunifikować wiele z efektów które są często rozważane niezależnie w badaniach nad kwantową grawitacją, takich jak: modyfikacje zasady nieoznaczoności, q-deformacje, modyfikacje relacji dyspersji cząstek, zakrzywienie przestrzeni pędów cząstek, deformacje symetrii czasoprzestrzennych, usuwanie osobliwości, zmiana sygnatury metryki, czy też redukcja wymiarowa.

Literatura

[1] C. W. F. Everitt *et al.*, Phys. Rev. Lett. **106** (2011) 221101 [arXiv:1105.3456 [gr-qc]].

[2] B. Bertotti, L. Iess, and P. Tortora, Nature, 2003 Sep 25; **425** (6956):374-6.

[3] T. E. Collett *et al.*, Science **360** (2018) 1342 [arXiv:1806.08300 [astro-ph.CO]].

[4] R. Wojtak, S. H. Hansen, J. Hjorth, Nature **477**:567-569, 2011.

[5] M. Ishak, Living Rev Relativ (2019) 22: 1.

[6] B. P. Abbott *et al.* [LIGO Scientific and Virgo Collaborations], Phys. Rev. Lett. **116** (2016) no.6, 061102 [arXiv:1602.03837 [gr-qc]].

[7] M. Born and L. Infeld, Proc. Roy. Soc. A **144** (1934) 425.

[8] M. Bojowald, Living Rev. Rel. **11** (2008) 4.

[9] A. Ashtekar and P. Singh, Class. Quant. Grav. **28** (2011) 213001 [arXiv:1108.0893 [gr-qc]].

[10] A. Ashtekar and J. Lewandowski, Class. Quant. Grav. **21** (2004) R53 [gr-qc/0404018].

[11] A. C. da Silva, "Symplectic geometry," in "Handbook of Differential Geometry, vol. 2", eds. F. J. E. Dillen and L. C. A. Verstraelen, Elsevier 2006, pp. 79-188, [arXiv:math/0505366 [math.SG]].

[12] M. Born, Proc. R. Soc. Lond. A **165**, 291 (1938).

[13] M. Born, Rev. Mod. Phys. **21**, 463 (1949).

[14] G. Amelino-Camelia, L. Freidel, J. Kowalski-Glikman and L. Smolin, Phys. Rev. D **84**, 084010 (2011).

[15] A. A. Kirillov, "Lectures on the Orbit Method," American Mathematical Society (2004).

[16] S. Major and L. Smolin, Nucl. Phys. B **473** (1996) 267 [gr-qc/9512020].

[17] C. Rovelli and F. Vidotto, Phys. Rev. D **91**, 084037 (2015).

[18] K. G. Wilson, Phys. Rev. D **10** (1974) 2445.

[19] M. Gell-Mann and M. Lévy, Il Nuovo Cimento **16** (1960) 705.

[20] E. Witten, Commun. Math. Phys. **92** (1984) 455.

[21] B. Zumino, Phys. Lett. B **87** (1979) 203.

[22] J. Lukierski, H. Ruegg, A. Nowicki and V. N. Tolstoi, Phys. Lett. B **264** (1991) 331.

[23] J. Lukierski and H. Ruegg, Phys. Lett. B **329** (1994) 189, [hep-th/9310117].

[24] A. Ashtekar, S. Fairhurst and J. L. Willis, Class. Quant. Grav. **20** (2003) 1031 [gr-qc/0207106].

[25] M. Bojowald and A. Kempf, Phys. Rev. D **86** (2012) 085017, [arXiv:1112.0994 [hep-th]].

[26] P. A. R. Ade *et al.* [BICEP2 and Keck Array Collaborations], Phys. Rev. Lett. **116** (2016) 031302 [arXiv:1510.09217 [astro-ph.CO]].

[27] M. Bojowald, S. Brahma, U. Buyukcam and F. D'Ambrosio, Phys. Rev. D **94** (2016) no.10, 104032 [arXiv:1610.08355 [gr-qc]].

[28] M. Bojowald, Front. in Phys. **3** (2015) 33 [arXiv:1409.3157 [gr-qc]].

[29] J. Ambjorn, J. Jurkiewicz and R. Loll, Phys. Rev. Lett. **95**, 171301 (2005) [hep-th/0505113].

[30] A. Ashtekar, Phys. Rev. Lett. **57** (1986) 2244.

[31] C. Rovelli and L. Smolin, Nucl. Phys. B **331** (1990) 80.

[32] B. Bahr, B. Dittrich and M. Geiller, arXiv:1506.08571 [gr-qc].

[33] S. Mizoguchi and T. Tada, Phys. Rev. Lett. **68**, 1795 (1992).

[34] S. L. Woronowicz, Publ. RIMS Kyoto Univ. **23**, 117 (1987).

5 Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo - badawczych (artystycznych).

5.1 Okres studiów magisterskich (2003-2008)

Ukierunkowanie mojej pracy badawczej na zagadnienia związane z kosmologią i grawitacją kwantową nastąpiło już na pierwszych latach studiów na kierunkach Fizyka oraz Astronomia na Wydziale Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej Uniwersytetu Jagiellońskiego. Nastąpiło to za sprawą, rozpoczętej na drugim roku studiów, współpracy z Profesorem Markiem Szydłowskim. W ramach tej współpracy, w okresie studiów magisterskich powstało kilka publikacji. Pierwsza z nich, napisana wspólnie z dr Tomaszem Stachowiakiem, dotyczyła opisu galaktycznego rozkładu ciemnej materii jako kondensatu Bosego-Einsteina ultralekkich aksjonów **[P18]**. Kolejna praca dotyczyła propozycji wykorzystania pierwotnych grawitonów do testowania pętlowej kosmologii kwantowej **[P31]**. Była to pierwsza publikacja która podjęła kwestię pierwotnych fal grawitacyjnych w pętlowej kosmologii kwantowej (LQC). Rozważania te były kontynuowane dla przypadku fazy superinflacji w LQC **[PP7]**. W kolejnej publikacji, znaleźliśmy szereg analitycznych rozwiązań w pętlowej kosmologii kwantowej **[P30]**. Kontynuacją badań w obszarze pętlowej kosmologii kwantowej było zbadanie niejednoznaczności modyfikacji pochodzących od holonomii koneksji Ashtekara. Badania te ujawniły możliwość istnienia szczególnego typu osobliwości w pętlowej kosmologii kwantowej **[P29]**. Wraz z prof. Szydłowskim oraz dr Orestem Hrycyną dokonaliśmy następnie szczegółowej analizy dynamiki tego typu modeli **[P26]**. Na podstawie moich badań dotyczących fal grawitacyjnych w pętlowej kosmologii kwantowej powstała praca magisterska na kierunku Astronomia: “Fale grawitacyjne w pętlowej grawitacji kwantowej"(promotor: prof. Marek Szydłowski). Część wyników stanowiących wkład do tej pracy zostały opublikowanych w mojej jednoautorskiej publikacji **[P27]**. Jednocześnie, obroniona została praca magisterska pt. “Kosmologia pętlowo-strunowańa kierunku Fizyka teoretyczna, przygotowana pod opieką prof. Jerzego Jurkiewicza. Część wyników przedstawionych w tej pracy zostało opublikowane w pracy **[P28]**. Ważnym okresem w czasie studiów magisterskich była również ponad dwuletnia współpraca z prof. Jerzym Smyrskim w zakresie symulacji pól magnetycznych do

komór dryfowych w eksperymencie PANDA w ośrodku GSI w Darmstadt. Wyniki moich symulacji przedstawiałem na konferencjach organizowanych tym ośrodku. Ponadto, w ramach szkoły letniej w tym ośrodku prowadziłem badania nad poprawkami do mas mezonów w ramach chiralnej teorii zaburzeń (ChPT). Projekt ten, którego efektem była praca "Fourth order corrections to the masses of the lightest hadrons from Chiral Perturbation Theory" realizowałem pod kierunkiem prof. Matthiasa Lutza. W trakcie studiów magisterskich realizowałem również, między innymi, projekt dotyczący dynamiki spinów czarnych dziur w aktywnych jądrach galaktyk w ramach praktyk w CAMK PAN, pod opieką prof. Marka Sikory. Warto również dodać, że w ramach studiów magisterskich, jeden semestr realizowałem na Uniwersytecie w Kopenhadze (w ramach programu Erasmus).

5.2 Okres studiów doktoranckich (2008-2012)

Głównym celem mojej pracy doktorskiej było skonstruowanie konsystentnej teorii zaburzeń kosmologicznych w ramach pętlowej kosmologii kwantowej. Cel ten udało się zrealizować, a zbudowaną kwantową teorię zaburzeń skalarnych uważam za jedno z moich dotychczasowych największych osiągnięć naukowych. Wyniki odnośnie zaburzeń skalarnych, uzyskane wraz z moimi francuskimi współpracownikami prof. Aurelienem Barrau, dr Thomasem Cailleteau, dr Julienem Grainem zostały opublikowane w artykule **[P11]**, cytowanym dotychczas 163 razy (według bazy SPIRES). W tym samym składzie powstał również artykuł dotyczący zaburzeń wektorowych **[P12]**. Wyniki przedstawione w tych publikacjach stanowiły istotny wkład do mojej pracy doktorskiej "Perturbations in loop quantum cosmology," której opiekunem był prof. Marek Szydłowski. Wyniki obliczeń przeprowadzonych w tej pracy otworzyły nowy obszar badań, którym zajmowałem się przez kolejne lata. W szczególności, skonstruowana przez nas teoria przewidziała istnienie efektu dynamicznej zmiany sygnatury czasoprzestrzeni przy gęstościach energii osiągających skalę Plancka (co opisałem w pracy **[K4]**) oraz fazy asymptotycznej ciszy (co dyskutuję w pracy **[K3]**).

Ponadto, w mojej jednoautorskiej publikacji **[P24]** przeprowadziłem szczegółową analizę generacji fal grawitacyjnych w LQC. W pracy **[P10]** wykazałem zaś możliwości fazy inflacji typu slow-roll w pętlowej kosmologii kwantowej oraz wskazałem na możliwość testowania tej teorii z wykorzystaniem mikrofalowego promieniowania tła. W wyniku kontynuacji tych badań, w szczególności w kontekście pierwotnych fal grawitacyjnych, powstał artykuł **[P20]**. Wyprowadzone w nim widma mocy dla zaburzeń tensorowych zostały ograniczone z wykorzystaniem danych CMB w pracy **[P16]**. Ograniczenia na modele LQC z wykorzystaniem mikrofalowego promieniowania tła zaprezentowano również w artykule **[P19]**. W pracy tej wykorzystano m.in. metodę rozróżniania modeli w świetle danych obserwacyjnych w oparciu o twierdzenie Bayesa. Podejście to w kontekście kosmologicznym przedyskutowano szerzej w artykule **[P2]**. W pracy **[P15]** zaproponowałem natomiast nową metodę wyznaczania temperatury kosmologicznej fazy *reheatingu* z wykorzystaniem obserwacji CMB. Zaś w artykuł **[P10]** wykorzystano dane CMB do ograniczenia efektu wygładzania zaburzeń kosmologicznych, które mogą być związane z fizyką na skali Plancka. Moje rozważania dotyczące pętlowej

kosmologii kwantowej dotyczyły również wprowadzenia potencjału pola skalarnego prowadzącego do barotropowego równania stanu (artykuł **[P25]**) jak również dynamiki modeli z dodatnią krzywizną (artykuł **[P23]**). W artykule **[P22]** zbadano natomiast kosmologiczne konsekwencje polimeryzacji pędu pola skalarnego. Wraz z prof. Włodzimierzem Piechockim dokonaliśmy natomiast szerokiej analizy modeli pętlowej kosmologii kwantowej, wykorzystując podejście bazujące o zredukowaną przestrzeń fazową (artykuły **[P17,P14,P13,P9]**). W szczególności, prace te dyskutują takie kwestie jak: rozwiązywanie więzów, wprowadzanie obserwabli, zagadnienie tzw. *kosmicznej amnezji*, ewolucja kwantowa nieosobliwych modeli kosmologicznych i problem czasu w kosmologii kwantowej.

5.3 Okres po doktoracie

Okres po doktoracie cechował się bifurkacją moich naukowych zainteresowań na badania w zakresie fizyki teoretycznej (kontynuacja dotychczasowych badań) oraz na obszar badań interdyscyplinarnych (eksploracja nowych kierunków). Poniżej, podsumuję te dwa obszary osobno, nie uwzględniając wyników stanowiących wkład do osiągnięcia habilitacyjnego.

5.3.1 Fizyka teoretyczna (bez wyników stanowiących wkład do osiągnięcia habilitacyjnego)

W okresie po doktoracie, kontynuowałem realizację programu badawczego związanego z zaburzeniami kosmologicznymi w pętlowej kosmologii kwantowej. W szczególności, powstała zaproszona praca przeglądowa **[P8]**, dotycząca możliwości testowania efektów LQC. Analizę widm zaburzeń skalarnych w pętlowej kosmologii kwantowej przeprowadzono zaś w publikacji **[P7]**. Natomiast, korzystając z własności fazy kosmicznej ultralokalnej w LQC, zaproponowaliśmy wprowadzenie "cichych" warunków początkowych dla zaburzeń kosmologicznych (artykuł **[P3]**). Wraz z moim magistrantem powstała praca **[P1]**, dotycząca znaczenia fazy ultralokalnej i jej związku z tak zwaną fazą *crumpled*, która obserwowana jest np. w ramach kazualnych dynamicznych triangulacji (CDT). Znaczenie kosmologiczne fazy crumpled i jej związek z krytycznością przeanalizowałem w pracy **[P5]**. Natomiast, w artykułach **[P4,K1]** podjąłem pierwszą próbę narzucenia ograniczeń obserwacyjnych na przewidywania CDT. W publikacji **[P6]** zaprezentowano metodę systematycznego wprowadzenia rozwinięcia typu slow-roll w pętlowej kosmologii kwantowej. W zawierającej oryginalne wyniki pracy konferencyjnej **[K2]** przyprowadzono analizę statystyki wartości własnych dla prototypu kwantowej wersji kosmologicznego modelu Bianchi IX. W preprincie **[PP2]** zaproponowano mechanizm generacji pierwotnej jednorodności kosmologicznej, bazujący na kwantowej naturze horyzontu kosmologicznego.

Ponadto, aktualnie rozwijam nowatorski kierunek badawczy związany z wykorzystaniem komputerów kwantowych do symulowania fizyki na skali Plancka. Badania w tym obszarze rozpocząłem w drugiej połowie roku 2017-tego. Doprowadziły one dotychczas do wyników które opisuje w trzech preprintach **[PP5,PP3,PP1]**. W ramach tego kierunku badawczego zawiązano w 2018-tym roku międzynarodowe konsorcjum QISS (The Quantum Informa-

tion Structure of Spacetime) którego jestem jedynym członkiem w Polsce. Jako członek Management Committee uczestniczę również w projekcie COST pt. “Quantum gravity phenomenology in the era of multi-messenger approach”.

5.3.2 Aktywność interdyscyplinarna i popularyzatorska

W okresie po doktoracie, zdecydowałem się w szerszym zakresie rozwinąć moje zainteresowania badaniami na pograniczu wielu dyscyplin oraz aktywność związaną z propagowaniem nauki.

Pod koniec 2012-tym roku zostałem finalistą interdyscyplinarnego-popularyzatorskiego konkursu INTER, organizowanego przez Fundację na rzecz Nauki Polskiej. W ramach tego programu zaprezentowałem projekt “Wszechświat i Życie"dotyczący kilku fizycznych aspektów związanych z powstawaniem oraz rozpowszechnieniem życia we Wszechświecie. Wyniki związane z zagadnieniami astrobiologicznymi prezentowałem m.in. w wystąpieniu “Astrobiological complexity,” na konferencji Biological Complexity in Cracow, 10-12 V 2013. Z kolei, w 2014-tym roku byłem jednym z czterech organizatorów kontynuacji ten konferencji - Biological Complexity in Cracow 2. W wyniku rozważań nad, mającymi kluczowe znaczenia dla życia, wzrostem złożoności oraz procesami nierównowagowymi powstał esej **[PP6]**. Pod moją opieką, powstała również praca magisterska “Non-equilibrium systems and growth of complexity” Pana Michała Mandrysza, obroniona na WFAIS UJ w 2017-tym roku **[M1]**.

W 2013-tym roku, razem z dr Piotrem Warchołem, zainicjowaliśmy interdyscyplinarny projekt badawczo-edukacyjny Garaż Złożoności (www.garageofcomplexity.com), realizowany na WFAIS UJ. W ramach tej działalności, staramy się stworzyć warunki umożliwiające zaangażowanym studentom rozwijać ich własne nowatorskie pomysły badawcze, dzięki czemu mogą oni zdobywać doświadczenie w interesujących ich dziedzinach nauki i techniki. Oprócz realizacji pomysłów badawczych, nasza aktywność ma na celu: kształtowanie umiejętności pracy zespołowej młodych naukowców, umożliwienie swobodnej wymiany idei naukowych i doświadczeń pomiędzy studentami i pracownikami naukowymi, stymulowanie interdyscyplinarności oraz rozwijanie odwagi naukowej i przedsiębiorczości społecznej. Projekt którym zainicjowaliśmy badawczą działalność Garażu Złożoności dotyczył tworzenia trójwymiarowych hodowli komórkowych z wykorzystaniem druku 3D. Kolejny projekt którego realizację zainicjowałem i koordynuję od końca 2013-tego roku dotyczy biodruku 3D. Badania te doprowadziły do opracowania biokompatybilnego materiału do biodruku 3D oraz do skonstruowania prototypu biodrukarki. Uzyskane wyniki były prezentował na konferencji Inżynieria Przyszłości 2015-tym rok, której towarzyszy publikacja **[K5]**. Pod moją opieką przygotowana została praca licencjacka „Hydrożelowy druk 3D w zastosowaniach biomedycznych,” obroniona w 2018-tym roku na WFAIS UJ przez Panią Magdalenę Chmielewską **[L1]**. Wraz z Grzegorzem Gazdowiczem, opracowaliśmy mikrofluidyczny układ *pe3dish* (www.pe3dish.com) który jest przedmiotem zgłoszenia patentowego P.417527 w Urzędzie Patentowym RP. W 2017-tym roku zrealizowałem projekt wysłania (z terenu Kampusu UJ) balonu stratosferycznego z eksperymentem astrobiologicznym. Projekt ten został opisany i

rozwinięty w pracy licencjackiej "Projekt astrobiologicznej misji stratosferycznej" obronionej w 2018-tym roku na WFAIS UJ przez mojego licencjata Pana Jakuba Lubańskiego **[L2]**. Z badaniami tymi związana jest koncepcja nanosatelity biofarmaceutycznego, którą wraz z dr Adamem Zadrożnym zaproponowaliśmy w pracy **[PP4]**. W ramach Garażu Złożoności, zorganizowaliśmy trzy interdyscyplinarne konferencje, których byłem współorganizatorem.

Istotną rolę odgrywa dla mnie również popularyzacja nauki, w szczególności wyników prowadzonych przeze mnie badań. Robię to zarówno poprzez wygłaszanie wykładów popularnonaukowych jak i poprzez artykuły popularnonaukowe **[POP1-POP7]** oraz prowadzony przeze mnie blog naukowy Science-Technology-Future (www.jakubmielczarek.com), na którym w 2018-tym roku napisałem 12 artykułów popularnonaukowych.

5.4 Dane bibliometryczne

Podsumowując, jestem autorem 41 (10 - jednoautorskich) publikacji naukowych dotyczących kwantowej grawitacji i kosmologii kwantowej opublikowanych w renomowanych czasopismach fizycznych. Poza tym, jestem autorem pięciu prac konferencyjnych (3 - jednoautorskie) oraz siedmiu preprintów (3 - jednoautorskie). Zgromadzona liczba cytowań oraz indeks Hirscha h to:

- 1056, $h = 17$ (baza SPIRES),
- 1185, $h = 18$ (baza Google Scholar),
- 700, $h = 14$ (baza Web of Science).

5.5 Pozostałe publikacje

5.5.1 Opublikowane artykułu naukowe:

[P1] M. L. Mandrysz and J. Mielczarek, "Ultralocal nature of geometrogenesis," Class. Quant. Grav. **36** (2019) no.1, 015004

[P2] J. Mielczarek, M. Szydłowski, A. Krawiec, P. Tambor, "Bayesian reasoning in cosmology", Zagadnienia Naukoznawstwa, 1-4 (215–218), 2018.

[P3] J. Mielczarek, L. Linsefors, A. Barrau, "Silent initial conditions for cosmological perturbations with a change of spacetime signature," Int. J. Mod. Phys. D **27** (2018) no.05, 1850050

[P4] J. Mielczarek, "From Causal Dynamical Triangulations To Astronomical Observations," EPL **119** (2017) no.6, 60003

[P5] J. Mielczarek, "Big Bang as a critical point," Adv. High Energy Phys. **2017** (2017) 4015145

[P6] J. Luc, J. Mielczarek, "Slow-roll approximation in loop quantum cosmology," JCAP **1701** (2017) no.01, 045.

[P7] S. Schander, A. Barrau, B. Bolliet, L. Linsefors, J. Mielczarek, J. Grain, "Primordial scalar power spectrum from the Euclidean Big Bounce," Phys. Rev. D **93** (2016) no.2, 023531.

[P8] A. Barrau, T. Cailleteau, J. Grain, J. Mielczarek, "Observational issues in loop quantum cosmology," Class. Quant. Grav. **31** (2014) 053001.

[P9] J. Mielczarek, W. Piechocki, "Gaussian state for the bouncing quantum cosmology," Phys. Rev. D **86** (2012) 083508.

[P10] J. Mielczarek, M. Kamionka, "Smoothed quantum fluctuations and CMB observations," Int. J. Mod. Phys. D **21** (2012) 1250080.

[P11] T. Cailleteau, J. Mielczarek, A. Barrau, J. Grain, "Anomaly-free scalar perturbations with holonomy corrections in loop quantum cosmology," Class. Quantum Grav. **29** (2012) 095010.

[P12] J. Mielczarek, T. Cailleteau, A. Barrau, J. Grain, "Anomaly-free vector perturbations with holonomy corrections in loop quantum cosmology," Class. Quantum Grav. **29** (2012) 085009.

[P13] J. Mielczarek, W. Piechocki, "Evolution in bouncing quantum cosmology," Class. Quantum Grav. **29** (2012) 065022.

[P14] J. Mielczarek, W. Piechocki, "Quantum of volume in de Sitter space," Phys. Rev. D **83** (2011) 104003.

[P15] J. Mielczarek, "Reheating temperature from the CMB," Phys. Rev. D **83** (2011) 023502.

[P16] J. Grain, A. Barrau, T. Cailleteau, J. Mielczarek, "Observing the Big Bounce with Tensor Modes in the Cosmic Microwave Background: Phenomenology and Fundamental LQC Parameters," Phys. Rev. D **82** (2010) 123520.

[P17] J. Mielczarek, W. Piechocki, "Observables for FRW model with cosmological constant in the framework of loop cosmology," Phys. Rev. D **82** (2010) 043529.

[P18] J. Mielczarek, T. Stachowiak, M. Szydłowski, "Vortex in axion condensate as a dark matter halo," Int. J. Mod. Phys. D **19** (2010) 1843.

[P19] J. Mielczarek, M. Kamionka, A. Kurek, M. Szydłowski, "Observational hints on the Big Bounce," JCAP **1007** (2010) 004.

[P20] J. Mielczarek, T. Cailleteau, J. Grain, A. Barrau, "Inflation in loop quantum cosmology: Dynamics and spectrum of gravitational waves," Phys. Rev. D **81** (2010) 104049.

[P21] J. Mielczarek, "Possible observational effects of loop quantum cosmology," Phys. Rev. D **81** (2010) 063503.

[P22] O. Hrycyna, J. Mielczarek, M. Szydłowski, "Asymmetric cyclic evolution in polymerised cosmology," JCAP **0912** (2009) 023.

[P23] J. Mielczarek, O. Hrycyna, M. Szydłowski, "Effective dynamics of the closed loop quantum cosmology," JCAP **0911** (2009) 014.

[P24] J. Mielczarek, "Tensor power spectrum with holonomy corrections in LQC," Phys. Rev. D **79** (2009) 123520.

[P25] J. Mielczarek, "Multi-fluid potential in the loop cosmology", Phys. Lett. B **675** (2009) 273.

[P26] O. Hrycyna, J. Mielczarek, M. Szydłowski, "Effects of the quantisation ambiguities on the Big Bounce dynamics," Gen. Rel. Grav. **41** (2009) 1025.

[P27] J. Mielczarek, "Gravitational waves from the Big Bounce", JCAP **0811** (2008) 011.

[P28] J. Mielczarek, M. Szydłowski, "Universe emerging from a vacuum in loop-string cosmology," JCAP **0808** (2008) 014.

[P29] J. Mielczarek, M. Szydłowski, "Emerging singularities in the bouncing loop cosmology," Phys. Rev. D **77** (2008) 124008.

[P30] J. Mielczarek, T. Stachowiak, M. Szydłowski, "Exact solutions for Big Bounce in loop quantum cosmology," Phys. Rev. D **77** (2008) 123506.

[P31] J. Mielczarek, M. Szydłowski, "Relic gravitons as the observable for Loop Quantum Cosmology," Phys. Lett. B **657** (2007) 20.

5.5.2 Prace konferencyjne

[K1] J. Mielczarek, "Phenomenology of Causal Dynamical Triangulations," Proceedings of the MG14 Meeting on General Relativity, pp. 3974-3977, 2017.

[K2] J. Mielczarek, W. Piechocki, "Level spacing distribution for the prototype of the Bianchi IX model," Acta Phys. Polon. B **46** (2015) no.9, 1729.

[K3] J. Mielczarek, "Asymptotic silence in loop quantum cosmology," AIP Conf. Proc. **1514** (2012) 81.

[K4] J. Mielczarek, "Signature change in loop quantum cosmology," *Relativity and Gravitation*, Springer Proceedings in Physics Volume **157** (2014) 555-562.

[K5] J. Mielczarek, G. Gazdowicz, J. Kramarz, P. Łątka, M. Krzykawski, A. Miroszewski, P. Pieczarko, R. Szczelina, P. Warchoł, S. Wróbel, "A Prototype of a 3D Bioprinter," *Solid State Phenomena* Vol **237** (2015) pp 221-226.

5.5.3 Preprinty

[PP1] J. Mielczarek, "Spin Foam Vertex Amplitudes on Quantum Computer - Preliminary Results," arXiv:1810.07100 [gr-qc].

[PP2] M. Artymowski and J. Mielczarek, "Quantum Hubble horizon," arXiv:1806.03924 [gr-qc].

[PP3] J. Mielczarek, "Quantum Gravity on a Quantum Chip," arXiv:1803.10592 [gr-qc].

[PP4] J. Mielczarek, A. Zadrożny "A concept of biopharmaceutical nanosatellite" arXiv:1802.04078 [physics.bio-ph]. (przyjęte do druku w New Space)

[PP5] J. Mielczarek, "Spin networks on adiabatic quantum computer," arXiv:1801.06017 [gr-qc].

[PP6] M. Mandrysz, J. Mielczarek, "The Top-Down Complexity", arXiv:1703.03301 [physics.pop-ph].

[PP7] J. Mielczarek and M. Szydłowski, "Relic gravitons from super-inflation," arXiv:0710.2742 [gr-qc].

5.5.4 Wybrane artykuły popularnonaukowe i edukacyjne

[POP1] J. Mielczarek, "Dualizm grawitacyjno kwantowy," 2019, http://wszystkoconajwazniejsze.pl/

[POP2] J. Mielczarek, "Kosmiczna droga do kwantowej grawitacji," 2018, http://www.racjonalista.pl/

[POP3] M. Mandrysz, J. Mielczarek, "O malejącej entropii," Foton, 136, 2017

[POP4] J. Mielczarek, "Na początku była cisza," 2014, http://wszystkoconajwazniejsze.pl/

[POP5] J. Mielczarek, "Silniki cieplne i rekurencje, " Foton, 133, 2016

[POP6] J. Mielczarek, "Garage Band Science," Academia nr 1 (45) 2016

[POP7] K. D. Kocurek, J. Mielczarek, P. Warchoł. "Garaż Złożoności - Makerspace na UJ," Alma Mater nr 175-176, 2015

5.6 Wyróżnienia

[W1] Zaproszenie do udziału w programie *Jutronauci 2018*, organizowanego przez Gazetę Wyborczą.

[W2] Wyróżnienie mojej publikacji pt. "Loop-deformed Poincaré algebra" przez edytorów EPL w 'Highlights of 2014'.

[W3] Wyniki moich badań zostały opisane w New Scientist Magazine, 11 VI 2014, Issue 2973 (cover story).

[W4] Finalista Naukowych Nagród Polityki, 2013.

[W5] Wyróżeninie eseju w Gravity Research Foundation 2013 Essay Competition.

[W6] Finalista programu INTER organizowanego przez Fundację na rzecz Nauki Polskiej, 2012.

[W7] Stypendium Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego dla Wybitnych Młodych Naukowców, 2012-2015.

[W8] Stypendium z funduszu Adama Krzyżanowskiego, 2011.

[W9] Stypendium z programu SET na miesięczny naukowy pobyt w Pennsylvania State University, 2011.

[W10] Nagroda START z Fundacji na rzecz Nauki Polskiej, 2011.

[W11] Stypendium NORDITA (Sztokholm) na miesięczny pobyt w tym instytucie, 2010.

[W12] Nagroda START z Fundacji na rzecz Nauki Polskiej, 2010.

[W13] Stypendium z Funduszu Florentyny Kogutowskiej dla wyróżniających się doktorantów, 2009.

[W14] Stypendia z programu Astrophysics Poland-France na wyjazdy do Francji.

[W15] Stypendium Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego za wybitne osiągnięcia naukowe w roku akademickim 2006/2007.

[W16] Stypendia naukowe na Uniwersytecie Jagiellońskim, 2004-2008.

5.7 Kierowanie i udział w projektach naukowych

[G1] Kierownik grantu *Sonata Bis 7* pt. "Teorie pola ze zwartymi przestrzeniami fazowymi - od grawitacji do układów złożonych" nr DEC-2017/26/E/ST2/00763 z Narodowego Centrum Nauki, 2018-2021.

[G2] Kierownik grantu *Mobilność Plus* 1641/MON/V/2017/0 z Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego, 2018-2019.

[G3] Kierownik grantu *Sonata* pt. "Kosmologiczne ograniczenia na kwantowe teorie grawitacji" nr DEC-2014/13/D/ST2/01895 z Narodowego Centrum Nauki, 2015-2018.

[G4] Kierownik grantu *Iuventus Plus* pt. "Nowe związki pomiędzy podejściami do kwantowej grawitacji" 0302/IP3/2015/73 z Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego, 2015-2017.

[G5] Wykonawca w grancie *Opus* pt. "Wczesny Wszechświat z teorii oddziaływań fundamentalnych" nr DEC-2013/09/B/ST2/03455 z Narodowego Centrum Nauki, 2014-2017.

[G6] Główny wykonawca w grancie promotorskim pt. "Zaburzenia w pętlowej kosmologii kwantowej" nr N N203 386437, z Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego, 2009-2011.

5.8 Opieka nad pracami licencjackimi

[L1] Magdalena Chmielewska, "Hydrożelowy druk 3D w zastosowaniach biomedycznych", 2018.

[L2] Jakub Lubański, "Projekt astrobiologicznej misji stratosferycznej", 2018.

[L3] Jakub Wnęk, "Quantum aspects of the de Sitter space", 2017.

[L4] Joanna Luc, "Rozwinięcie slow-roll w kosmologii klasycznej i kwantowej", 2016.

5.9 Opieka nad pracami magisterskimi

[M1] Michał Mandrysz, "Non-equilibrium systems and growth of complexity", 2017.

5.10 Współpraca krajowa i zagraniczna

1. Dr Michał Artymowski (Ariel University, Izrael)
2. Prof. Aurelien Barrau (LPSC, Grenoble, Francja)
3. Prof. Martin Bojowald (Penn State University, USA)
4. Dr Suddhasattwa Brahma (Asia Pacific Center for Theoretical Physics, Korea)
5. Prof. Antonino Marciano (Fudan University, Shanghai, Chiny)
6. Prof. Włodzimierz Piechocki (NCBJ, Warszawa)
7. Prof. Carlo Rovelli (CPT, Marseille, Francja)

8. Prof. Marek Szydłowski (OA UJ, Kraków)

9. Dr Tomasz Trześniewski (IF UJ, Kraków)