

Bydgoszcz, 11 maja 2022

Prof. zw. dr hab. inż. Adam Gadomski  
Politechnika Bydgoska im. J. J.  
Śniadeckich,  
Instytut Matematyki i Fizyki,  
Zakład Fizyki, Zespół Modelowania  
Procesów Fizykochemicznych,  
Al. Kaliskiego 7, 85-796 Bydgoszcz  
Tel./Fax: 52-3408697(...43)  
Email: agad@pbs.edu.pl

## Recenzja

rozprawy doktorskiej Pana Magistra Karola Piotra Capały  
pt. *Anomalous Stochastic Dynamics in the Underdamped Regime*,  
wykonanej pod kierunkiem prof. dr. hab. Bartłomieja Dybca.

Pan Magister Karol Capała w przedstawionej do recenzji rozprawie doktorskiej zajął się typowymi zjawiskami powodowanymi przez szum Levy'ego, ze szczególnym uwzględnieniem stanów stacjonarnych z udziałem wpływu tzw. potencjałów jednodołkowych i zagadnień pierwszej ucieczki. Badane układy analizowane są przede wszystkim za pomocą symulacji numerycznych równania Langevina; w miarę możliwości przedstawione są także wyniki analityczne.

W pierwszej części pracy, stany stacjonarne w potencjałach jednodołkowych badane były w zakresie reżimu przetłumionego i w obszarze pełnej dynamiki Langevina. W przypadku przetłumionym przedstawiono numeryczne dowody na istnienie nierównowagowych stacjonarnych stanów o modalności wyższej niż dwa, wraz z argumentami fenomenologicznymi, kiedy ich pojawienie się jest możliwe. Stany stacjonarne w przypadku nieprzetłumionym w potencjale czwartego stopnia są analizowane zarówno w obszarze tarcia liniowego jak i nieliniowego. Przedstawiono i przedyskutowano także warunki zapewniające pojawienie się bimodalności w obu przypadkach.

Druga część pracy koncentruje się wokół dwóch archetypicznych procesów ucieczki. Dla inercjalnego ruchu w skończonym przedziale czasowym przedstawiono analizę średniego pierwszego czasu wyjścia i charakterystyki ucieczki. Przedstawiono argumenty, że jakościowe zachowanie średniego pierwszego czasu wyjścia jest podobne bądź typowe dla wszystkich wartości wykładnika stabilności.

W zwięźczeniu dokonań pracy, podjęto analizę szybkości przejścia między stanami dla ruchu w tzw. potencjale dwudołkowym. W granicy ruchu przetłumionego omówiono odchylenia od przybliżenia słabego szumu. Dla pełnej dynamiki przedstawiono przybliżony wzór analityczny, pokazujący, że stosunek szybkości przejścia zależy zarówno od wysokości bariery potencjału, jak i jego szerokości, co stanowi *novum* w tej pracy. Przybliżenie to porównano rzetelnie z wynikami symulacji numerycznych.

Autor tej rozprawy doktorskiej oparł jej treść na merytorycznej zawartości sześciu prac, w których to pracach Pan Karol Capała jest zawsze – niezależnie od tego, czy wskazano na tzw. porządek alfabetyczny autorów (czy też nie) - pierwszym w kolejności autorem. (Ponadto, wypada zauważyć, że Kandydat uczestniczył w realizacji co najmniej takiej samej ilości innych prac, których był współautorem.) Są to następujące prace [A1-A6]:

- A.1 K. Capała, B. Dybiec, Multimodal stationary states in symmetric single-well potentials driven by Cauchy noise, *J. Stat. Mech.*, 033206 (2019).
- A.2 K. Capała, B. Dybiec, Stationary states for underdamped anharmonic oscillators driven by Cauchy noise, *Chaos* 29, 093113 (2019).
- A.3 K. Capała, B. Dybiec, E. Gudowska-Nowak, Nonlinear friction in underdamped anharmonic stochastic oscillators, *Chaos* 30, 073140 (2020).
- A.4 K. Capała, B. Dybiec, Inertial Levy flights in bounded domains, *Chaos* 31, 083120 (2021).
- A.5 K. Capała, B. Dybiec, E. Gudowska-Nowak, Peculiarities of escape kinetics in the presence of athermal noises, *Chaos* 30, 013127 (2020).
- A.6 K. Capała, B. Dybiec, Underdamped, anomalous kinetics in double-well potentials, *Phys. Rev. E* 102, 052123 (2020).

W pracy A.1 przeanalizowano efekt multimodalności, używając w tym celu metod numerycznych i koncepcji „sklejonych potencjałów”, będących odpowiednią sumą jednomianów potęgowych. Zauważono, że liczba modów drgań w tak skonstruowanym potencjale nie może przewyższyć liczby maksimów zawartych w krzywiźnie uogólnionego potencjału harmonicznego. Generowanie określonej liczby modów układu odpowiada fizycznie za jedno-jednoznaczność korespondencję ze stanami stacjonarnymi w odpowiedniku równania Langevina w postaci równania Fokkera-Plancka (F-P) z pochodną frakcyjną (będącą efektem działania  $\alpha$  —stabilnego nierównowagowego szumu Lévy’ego), z ich liczbą większą od dwóch.

W pracy A.2 (tak, jak i w trzech następnych, opublikowanych w opiniotwórczym czasopiśmie AIP *Chaos*) przyglądnięto się bliżej mechanizmowi niedotłumionych, anharmonicznych oscylacji w reprezentowanych przez stany stacjonarne, które powstały wskutek wpływu na nie tzw. szumu Cauchy’ego, tj. gdy indeks  $\alpha$  pochodnej frakcyjnej w równaniu F-P wynosi jeden. Jest to szczególny przypadek działania ( $\alpha=1$ )—stabilnego nierównowagowego szumu Lévy’ego. Otrzymano bimodalne i trimodalne stany stacjonarne, w tym ostatnim przypadku proponując jednomian szóstego stopnia w potencjale fizycznym układu z addytywnym szumem Cauchy’ego. (W ogóle, we wszystkich proponowanych do oceny doktoratu sześciu pracach A.1-A.6 wybrany do imitowania wpływu środowiska zewnętrznego  $\alpha$  —stabilny nierównowagowy szumu Lévy’ego, miał zgodnie z koncepcją równania Langevina, charakter addytywny.) Stany stacjonarne w przypadku działania szumu Cauchy’ego mają charakter nieboltzmannowski, w przeciwieństwie np. do szumu Gaussa z  $\alpha=2$ , w którym to przypadku liczba stanów stacjonarnych (dla kwadratowego potencjału harmonicznego w odpowiedniku w postaci równania Langevina) wynosi jeden. Okazuje się jednak, że gdy weźmie się potencjał binarnego (typu układ-otoczenie) oddziaływania wyższego rzędu, np. kwartyczny, tzn. wprowadzający anharmoniczność do układu, to liczba modów drgań może się zwiększyć do dwóch. Cały układ został przebadany dla przypadku tzw. liniowego tarcia, z użyciem siły typu stokesowskiego, z tłumieniem efektu prędkości w ośrodku tłumiącym.

W pracy A.3 opisano analogiczny do tego, który przedstawiono w A.2 przypadek, lecz z użyciem niestokesowskiego mechanizmu tarcia, tj. gdy mamy do czynienia z tłumieniem na poziomie siły tłumiącej wyższych potęgowych modów prędkości, np. sześciennego, a także piątego stopnia. Nałożono jednak pewne ograniczenie na wielkość potęgi tego modu, będącą w relacji z wybraną do eksperymentu numerycznego potęgą potencjału siły pułapkowej oscylacje, związanej jednoznacznie z wartością indeksu  $\alpha$ . Podobnie, jak w przypadku powyższym (A.2) zaobserwowano multimodalność stanów stacjonarnych, również w bezpośredniej analogii do przypadku przetłumionego, w którym nie występują przyspieszenia w tym interaktywnie nierównowagowym układzie drgającym. Multimodalność, np. opisana trimodalność, implikują pewien podział energii kinetycznej na „modowe” stopnie swobody ruchu, łamiąc na ogół zasadę ekwipartycji energii w tzw. niedeterministycznym reżimie

klasycznym. Autor tej recenzji w sposób uzasadniony liczy na pewną dyskusję w ramach tego zawężenia tematycznego podczas obrony pracy doktorskiej – referencją może być dość popularna w ostatnim czasie praca na ten temat w J. Stat. Phys. Autorstwa J. Łuczki z Uniwersytetu Śląskiego.

W pracy A.4 zbadano loty Lévy'ego, w których indywidua realizujące taki lot poddane są działaniu „pozornej” siły bezwładności w skończonym obszarze ich realizacji. Obszar taki charakteryzuje się absorbcyjnymi warunkami brzegowymi. Przeanalizowano efekt ucieczki (wyjścia) cząstki „próbnej” z tak skonstruowanego obszaru i obliczono wielkość średniego pierwszego czasu wyjścia z tego obszaru, oczywiście gdy na cząstkę bądź układ działa szum Lévy'ego. Zaproponowano reżim nieprzetłumiony oraz stowarzyszony z szumem Ornsteina-Uhlenbecka mod Lévy'ego. Uzyskano zależność kinetyki pierwszego wyjścia cząstki z obszaru jako spełniające warunki podobne do warunków spełnionych przez zintegrowany procesu Wienera. Otrzymano zależność tych kinetyk od warunków początkowych nałożonych na proces oraz zwrócono uwagę na efekt skalowania użytych do badań numerycznych równań. Stwierdzono słabą zależność od parametru stabilności szumu  $\alpha$ .

W pracy A.5 analizę zagadnienia oparto na fakcie fizycznym, wskazującym na to, że szum Lévy'ego jest szumem nietermicznym. Ten fakt niesie za sobą znaczące konsekwencje dotyczące procesu kinetyki ucieczki bądź wyjścia ze skończonego obszaru, w którym cząstka „próbna” odczuwa efekt pułapkowania. M. in. w kontraście do szumu gaussowskiego, w którym wyjście z minimum potencjału jest zdeterminowane wysokością efektywnej bariery tego potencjału tak, jak to jest pokazane w zagadnieniu Kramersa z charakterystycznym, słabo symetrycznym i bi-minimalnym potencjałem pułapkowania, w przypadku szumu Lévy'ego decyduje szerokość bariery potencjału, ponieważ dominuje w tym procesie długoczasowa kinetyka z tzw. długim ogonem, sugerująca obecność niewykładniczych, a raczej bardziej algebraicznych przebiegów czasowych w obszarze głównych charakterystyk dynamicznych. Ucieczka spułapkowanej cząstki „próbnej” ze skończonego obszaru przestrzeni fazowej i w warunkach obecności nierównowagowego szumu nietermicznego stanowi tu asumpt do poważnej dyskusji przeprowadzonej przez Kandydata i jego Promotora. Uważam, że praca ta stanowi poważny i cenny wkład merytoryczny do całej dyskusji w ramach rozprawy doktorskiej, ponieważ podejmuje ważny aspekt wpływu szumu nietermicznego w pewnej konfrontacji oddziaływania tego szumu z układem w kontekście analogicznej akcji, gdy działać będzie szum równowagowy, szum gaussowski o charakterystyce termicznej.

W pracy A.6 podjęto kontrastywne porównanie dynamiki przetłumionego układu dynamicznego oraz jego pełnego (z dominującą obecnością efektu przyspieszenia) układu dynamicznego, działających w reżimie potencjału bistabilnego/dwumodowego (typu Kramersa). Pokazano, że w przypadku realizacji dynamicznych pełnego układu, jego dynamika zależy zarówno od wysokości, jak i od szerokości bariery potencjału. Pokazano, oznacza tutaj, że wskazano, jak poprzednio, na numeryczno-symulacyjne dowody świadczące o tym, że jest to fizycznie spełnione. Tabela I w A.6 podejmuje w syntetycznej formie konkludującą dyskusję na temat mówiący o różnicach pomiędzy wpływem na badany układ dynamiczny obu kontrastywnych, tj. (nie)równowagowych typów szumów.

Czego Autorowi tej recenzji nieco brakło w tej pracy oraz przedstawionych do oceny pracach A.1-A.6 to dopełnienia rozważanych efektów dynamicznych i kinetycznych o adekwatne, przypisane do teoretycznych realizacji szkiców pewnych adekwatnych, a praktycznych zastosowań. W pracach A.1-A.6 są one wymieniane, ale w pracy doktorskiej powinny również zostać omówione, krótko opracowane, a i w konsekwencji, przekonywująco porównane z modelem; wszakże, gdy tak się nie dzieje, to w jakim celu model jest proponowany do opis tych wszystkich dotyczących się tematyki pracy doktorskiej, bardzo

interesujących i zasługujących na uwagę efektów dynamiczno-kinetycznych. Jako personalny przykład, autor tej recenzji wywołuje ten sprzed wielu lat, otrzymany od wieloletniego redaktora głównego porządnego czasopisma z zakresu wzrostu kryształów, a prowadzący do ostatecznego odrzucenia jego artykułu. Brzmiał on: „*One lucid example/statement would suffice to accept the paper but ... it didn't appear finally*”. . . Nie dałem wówczas przekonywującego, dostatecznie mądrego przykładu – teraz ufam, że Kandydat okaże się lepszy i zaproponuje (dowolny) taki, przekonywujący, że jego model konformuje do otaczającej nas rzeczywistości? Ponadto, nie wnoszę czegokolwiek do bardzo dobrze i mądrze opracowanej treści tej rozprawy doktorskiej – jeden dobry przykład podany przez Kandydata przekona mnie, że jest ona pożyteczna i że stanowi dobry krok w dalszym badaniu układów kontrastujących z tymi przetłumionymi, w warunkach nierównowagowej interakcji z otoczeniem.

Reasumując, w rozprawie bardzo rzetelnie od strony fizycznej pokazano użyteczność szumów typu nierównowagowego, wynikającą z „asymetrycznej” globalno-binarnej interakcji układu dynamicznego z otoczeniem na dynamiczne i kinetyczne zachowania pewnej klasy układów dynamicznych, reprezentujących (nie)liniowe oraz potęgowo zależne w zakresie szybkości tłumienia, charakterystyki, prowadzące bezpośrednio do multimodalności stanów stacjonarnych tych układów, stanowiących ich chaotyczną i potencjalnie obfitą w zastosowaniach projekcję na rzeczywistość fizyczną.

Z innej strony, tj. z bardzo nielicznych usterek o charakterze technicznym (gramatycznym, typograficznym, formalnym, itp.) powinno się wymienić – w celu poprawy struktury przedstawionej pracy - to, co następuje:

-Str. 7 lub 15/125 w wersji pdf: „*the azevolution of velocity and contains the stochastic part*” – azevolution?

-Str. 9 lub 17/115 w wersji pdf: „*For the noise perturbed systems one, one may wonder about*” – one, one?

-Str. 9 lub 17/115 w wersji pdf: równanie 2.2: decyzja czy w argumentie  $\sigma$  czy  $\sigma^2$ ? Ponadto, czy stylizowane Z (czynniki normalizacyjny), tj. suma statystyczna stanów nie powinna w klasycznym przedstawieniu być w potęgzie -1?

-Str. 17 lub 25/115 w wersji pdf: *If we consider the deterministic force-free case, i.e.  $V(x) = 0$* , lecz może też być  $V(x) = \text{const.}$  (niezależny od  $x$ )?

-Str. 17 lub 25/115 w wersji pdf: *One can easily see that in Eq. (2.13)  $T(v)$  plays the similar role to the deterministic force  $-V'(x)$  in the overdamped regime, see Eq. (1.4). Therefore, the generalized  $v$ -potential can be used to relate overdamped solutions to the velocity marginal distribution  $P(v)$ .* Pojawia się pytanie:  $T(v)$  gra matematycznie podobną rolę czy jakąś inną (fizyczną już) rolę, będąc siłą tarcia? (Jest to, moim zdaniem, nieprecyzyjnie sformułowane porównanie.)

-*Ibidem*: błąd techniczny w trzeciej linii przed równaniem (2.14), tj. we fragmencie tekstu „i.e.,  $T(v)v < 0$  – the ‘friction force’  $T(v)$  is opposite to velocity”, dot.  $T(v)v < 0$  – niezrozumiałe?

-*Ibidem*: „*However, even for very large sigma*” (7 linii powyżej końca strony nr 17) – czy to  $\sigma$  będąca odchyleniem standardowym w danym rozkładzie?

-Str. 18 lub 26/115 w wersji pdf (po równaniu 3.1): j. angielski „*Examination of the LHP distribution can provide deeper insight into a system's dynamics.*”, powinno być a system's dynamic, a jeśli dynamics to bez ‘a’.

## **PODSUMOWANIE**

W podsumowaniu recenzji, uważam, że napisana w dobrze sprawdzonym pod względem gramatycznym języku angielskim praca doktorska Pana Magistra Karola Capały pt. *Anomalous Stochastic Dynamics in the Underdamped Regime*, wykonana pod kierunkiem prof. dr hab. Bartłomieja Dybca na Wydziale Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Uniwersytetu Jagiellońskiego, spełnia kryteria istotności podjętego problemu i stanowi bardzo ambitny wkład w rozwiązanie problemu stochastycznej interakcji badanego układu dynamicznego z jego nierównowagowym otoczeniem, ciągle prowokującego do dyskusji na tematy związane z ekwipartycją energii – to może stanowić podstawę do publicznego udzielenia odpowiedzi na ten temat przez Kandydata podczas obrony, z poczynieniem uwagi, że sedno tej odpowiedzi zostało już zawarte w treści pracy (jest to więc prośba o adekwatne podsumowanie) .

Wyżej przedstawiona argumentacja stanowi podstawę do jednoznacznego stwierdzenia, że powierzona mi do recenzji rozprawa doktorska *Anomalous Stochastic Dynamics in the Underdamped Regime*, spełnia w pełni wymogi stawiane rozprawom doktorskim zgodnie z artykułem 187, Prawa o Szkolnictwie Wyższym i Nauce z dnia 20 lipca 2018 r. (o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki). W związku z tym wnioskuję z przyjemnością i pełnym przekonaniem o dopuszczeniu Pana Magistra Karola Capały do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Adam Gadomski

A handwritten signature in black ink, reading "Adam Gadomski". The script is cursive and fluid, with the first letters of the first and last names being capitalized and prominent.